

# Globálne miery efektívnosti

## Global Efficiency Measures

Peter Fandel

### **Anotácia v slovenskom jazyku**

Obdobie ostatných desiatich rokov je v oblasti analýzy efektívnosti charakteristických tak vývojom nových modelov a metód, ako aj množstvom aplikácií v rôznych oblastiach hospodárskeho života. Empirické aplikácie, a to platí aj pre oblasť poľnohospodárstva, sú založené buď na radiálnych alebo aditívnych modeloch. Nevýhodou týchto prístupov je, že radiálne modely vzhľadom na svoj charakter zvyčajne nadhodnocujú efektívnosť, pretože nie sú schopné zohľadniť neradiálne odchýlky od hranice efektívnosti. Na druhej strane aditívne modely sú schopné zohľadniť všetky zdroje neefektívnosti (radiálne aj neradiálne), avšak priamo neposkytujú mieru efektívnosti. V predkladanom príspevku komparujeme s vyššie uvedenými modelmi tzv. *globálne miery efektívnosti* (Cooper a Pastor, 1995), ktoré zohľadňujú všetky zdroje neefektívnosti a priamo poskytujú mieru efektívnosti. V práci aplikujeme globálne miery efektívnosti, ktoré sú odvodené z Russellovej grafickej miery technickej efektívnosti a vylepšenej Russellovej grafickej miery technickej efektívnosti.

### **Anotácia v anglickom jazyku**

The period of the recent 10 years in the field of efficiency analysis is characteristic both by the development of new models and methods and extensive number of empirical applications in various sectors of economy as well. Empirical applications, and it is also applicable for the sector of agriculture, are based either on radial or additive models. Radial models due to their nature usually overstate efficiency when nonzero slacks are present because they do not account for the nonradial inefficiency of the slacks. In contrast to these radial models, the additive models accounts for all sources of inefficiency, i.e. radial and nonradial, however, they do not directly provide efficiency measure. In the paper we compare above described models with so called *global efficiency measures* (Cooper a Pastor, 1995) which are able to account for all sources of inefficiency and directly provide efficiency measure. In the we present and apply the global efficiency measure which is derived from Russell Graph Measure of Technical Efficiency and Enhanced Russell Graph Measure of Technical Efficiency.

**Kľúčové slová:** globálne miery technickej efektívnosti, analýza dátových obalov, Russellove miery technickej efektívnosti

**Key words:** global measures of technical efficiency, Data Envelopment Analysis, Russell measures of Technical Efficiency

### **Úvod**

Teoretické základy analýzy technickej efektívnosti položil Koopmans (1951), ktorý definoval technickú efektívnosť ako prípustný input/output vektor, v ktorom nie je technologicky možné zväčšiť žiaden output (alebo žiaden input redukovať) bez súčasnej redukcie iného outputu (alebo zvýšenia iného inputu). Debreau (1951) a neskôr Farrell (1957) odvodili inputovo orientované indexy technickej efektívnosti vyjadrené formou ekviproporcionálnej (radiálnej) redukcie všetkých vstupov pri danej úrovni výstupov. Tieto indexy boli neskôr inšpiráciou pre Charnesa et al. (1978), Bankera et al. (1984) a Färe et al. (1985, 1994), ktorí odvodili a neskôr

rozvinuli Analýzu dátových obalov (DEA), metodológiu založenú na aplikácii matematického programovania. Analýza dátových obalov je technika, ktorá na základe výpočtu konvexného obalu dát hodnotených producentov (hranice produkčných možností) umožňuje vypočítať relatívnu efektívnosť všetkých hodnotených producentov. Táto technika sa stala veľmi populárnou pri výpočte technickej efektívnosti, pretože pomerne jednoduchým spôsobom umožňuje zohľadniť transformáciu viacerých vstupov na viacero výstupov, je neparametrická, nevyžaduje ceny vstupov a nie je potrebné vopred definovať typ správania sa producenta (maximalizácia zisku, resp. minimalizácia nákladov).

Potenciálnym problémom pôvodných modelov DEA je, že nie sú v súlade s definíciou navrhnutou Koopmansom. Z toho dôvodu Farrellovské radiálne miery efektívnosti môžu nadhodnocovať efektívnosť, pretože nie sú schopné zohľadniť neradiálne odchýlky od hranice efektívnosti. Färe a Lowell (1978) na tento problém reagovali tým, že navrhli potrebné vlastnosti, ktoré musí ideálna technická efektívnosť spĺňať a neskôr i miery technickej efektívnosti vyhovujúce týmto vlastnostiam. Tieto miery nazvali *Russellova inputová miera technickej efektívnosti* (Färe et al., 1983) a *Russellova outputová miera technickej efektívnosti* (Färe et al., 1985). Navrhli taktiež *Russelovu grafickú mieru technickej efektívnosti*, ktorá na rozdiel od predchádzajúcich dvoch simultánne zohľadňuje neefektívnosť tak vstupov, ako aj výstupov.

Problém súladu DEA modelov s Koopmansovou definíciou bol neskôršie riešený aj v samotných DEA modeloch. Aditívne DEA modely (Charnes et al., 1985) sú toho príkladom. Tieto sú schopné zohľadniť všetky zdroje neefektívnosti (radiálne aj neradiálne), avšak priamo neposkytujú mieru efektívnosti. Neskôršie boli publikované radiálne modely DEA, ktoré boli schopné riešiť neradiálne zdroje neefektívnosti. Väčšinou ide o viazťazové postupy, kedy po výpočte Farrellovských mier efektívnosti v prvej fáze sa v druhej fáze hľadalo riešenie s nulovými neradiálnymi odchýlkami (Cooper, Seiford, Tone, 2000, s.44). Často aplikovanou metódou je multietapová DEA navrhnutá v práci Coelli et al. (1997).

V tomto príspevku venujeme osobitnú pozornosť mieram, ktoré implicitne zohľadňujú Koopmansovu definíciu efektívnosti a ktoré vychádzajú z Russellových mier.

## **Cieľ a metodika**

Cieľom tohto príspevku je prezentovať nové globálne miery efektívnosti a na vhodnej aplikácii poukázať na ich výhody, resp. nevýhody v porovnaní s metodológiami v súčasnosti najčastejšie používanými.

Každoročne v časopiseckých, ako aj knižných prameňoch pribúda veľké množstvo nových prístupov hodnotenia efektívnosti. Slabé stránky známych metodologických postupov sa postupne odstraňujú a súčasne nové prístupy a vylepšenia prichádzajú do pozornosti teoretickej fronty. Jedným z nových smerov, ktorý predstavuje perspektívny nástroj hodnotenia efektívnosti, sú globálne miery efektívnosti. Ich prínosom je predovšetkým to, že efektívnosť hodnotia globálne a to tak z aspektu vstupov, ako aj výstupov. Ich teoretické posúdenie ako i aplikácie je obsahom nasledovnej časti príspevku.

## **Výsledky a diskusia**

Názov *globálne miery efektívnosti* (GMF) bol prvýkrát použitý v práci Cooper a Pastor (1995). GME môžu byť definované tak pre radiálne, ako i neradiálne modely DEA. Pastor et al. (1999) odvodili GME z Russellových mier technickej efektívnosti.

Predpokladajme, že máme množinu  $n$  producentov používajúcich  $m$  vstupov a  $s$  výstupov,

$$\{(X_j, Y_j) = (x_{1j}, \dots, x_{mj}, y_{1j}, \dots, y_{sj}), j = 1, \dots, n\},$$

kde všetky vstupy a výstupy sú kladné. Ďalej predpokladajme, že množina produkčných možností  $T = \{(X, Y) / Y \text{ môže byť produkované z } X\}$  spĺňa zvyčajnú požiadavku konvexity, silnej disponibilít a konštantných výnosov z rozsahu (viď Banker et al., 1984).

Russellova grafická miera technickej efektívnosti bola definovaná ako kombinácia inputovej a outputovej Russellovej miery technickej efektívnosti:

Inputovú Russellovu mieru technickej efektívnosti možno vypočítať riešením nasledovnej úlohy lineárneho programovania (Färe et al., 1985, s.160):

$$R_i(X_0, Y_0) = \min \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i$$

za podm.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$\theta_i \leq 1, \quad \forall i, r,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Outputovú Russellovu mieru technickej efektívnosti formulovali Färe et al. (1985, ss.160, 161) ako nasledovnú úlohu lineárneho programovania:

$$R_o(X_0, Y_0) = \max \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \varphi_r$$

za podm.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \varphi_r y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$\varphi_r \geq 1 \quad \forall i, r,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Russellovu grafickú mieru technickej efektívnosti možno ako kombináciu vyššie uvedených mier vypočítať riešením nasledovnej úlohy matematického programovania:

$$R_g(X_0, Y_0) = \min \frac{1}{m+s} \left( \sum_{i=1}^m \theta_i + \sum_{r=1}^s \frac{1}{\varphi_r} \right)$$

za podm.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \varphi_r y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$0 < \theta_i \leq 1, \varphi_r \geq 1 \quad \forall i, r,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Nevýhodou vyššie uvedenej grafickej miery efektívnosti je, že musí byť počítaná ako úloha nelineárneho programovania a jej interpretácia nie je jednoduchá, nakoľko  $R_g$  je vážený priemer aritmetického a harmonického priemeru.

Pastor et al. (1999) navrhli namiesto aditívnej kombinácie inputovej a outputovej Russellovej miery efektívnosti pomerovú mieru. Je charakteristická tým, že oddelene priemerujú inputovú a outputovú efektívnosť a potom kombinujú tieto dva komponenty efektívnosti vo forme pomernej hodnoty. Výsledkom je nasledovný model:

$$R_e(X_0, Y_0) = \min \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i}{\frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \varphi_r}$$

za podm.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{i0}, \quad i = 1, \dots, m \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \varphi_r y_{r0}, \quad r = 1, \dots, s,$$

$$0 < \theta_i \leq 1, \varphi_r \geq 1 \quad \forall i, r,$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Túto globálnu mieru efektívnosti, ktorú Pastor et al. nazvali  $R_e$  - *vylepšená Russelova grafická miera technickej efektívnosti* (Enhanced Russell Graph Technical Efficiency Measure) možno interpretovať ako pomer medzi priemernou efektívnosťou vstupov a priemernou efektívnosťou výstupov.  $R_e$  možno dekomponovať na inputový komponent priemernej efektívnosti a outputový komponent, čím sa dá transparentnejšie posúdiť efektívnosť posudzovaného producenta.

Ak  $(\theta_1^*, \dots, \theta_m^*, \varphi_1^*, \dots, \varphi_s^*)$  je optimálnym riešením úlohy (3), potom čitateľ  $(1/m) \sum_{i=1}^m \theta_i^*$  je inputovou mierou technickej efektívnosti a menovateľ  $(1/s) \sum_{r=1}^s \varphi_r^*$  je outputovou mierou technickej efektívnosti.

Globálnu mieru efektívnosti  $R_e$  a Russellovu inputovú a outputovú mieru technickej efektívnosti sme porovnávali so štandardnými Farrellovskými DEA mierami efektívnosti a to s radiálnym inputovým a outputovým DEA modelom za podmienok konštantných výnosov z rozsahu. Analýzu sme realizovali na simulovaných dátach 5 producentov s 2 vstupmi a 2 výstupmi, ktoré sú uvedené v tab.1.

Tab. 1 Použité (simulované) údaje

Faktory	Producenti				
	Prod. 1	Prod. 2	Prod. 3	Prod. 4	Prod. 5
Vstup 1	100	150	160	180	94
Vstup 2	90	50	55	72	66
Výstup 1	20	19	25	27	22
Výstup 2	151	131	160	168	158

Celkove sme riešili päť typov modelov. Vypočítané miery technickej efektívnosti sú uvedené v tab.2.

Tab. 2 Miery efektívnosti

Producenti	Miery technickej efektívnosti					
	KVR RAD IN	KVR RAD OUT	KVR RAD OUT <sup>-1</sup>	Russellove miery		
				R <sub>e</sub>	R <sub>i</sub>	R <sub>o</sub>
Prod. 1	0,898	1,113	0,898	0,780	0,890	1,142
Prod. 2	0,901	1,110	0,901	0,839	0,846	1,009
Prod. 3	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Prod. 4	0,890	1,123	0,890	0,817	0,887	1,086
Prod. 5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
Priemer	0,938	1,069	0,938	0,887	0,925	1,047

Legenda:

- KVR RAD IN - miery efektívnosti z inputovo orientovaného radiálneho DEA modelu ( $\theta$ )
- KVR RAD OUT - miery efektívnosti z outputovo orientovaného radiálneho DEA modelu ( $\varphi$ )
- KVR RAD OUT<sup>-1</sup> - recipročné hodnoty miery efektívnosti z outputovo orientovaného radiálneho DEA modelu ( $\varphi^{-1} = \theta$ )
- R<sub>e</sub> - vylepšená Russellova grafická miera technickej efektívnosti
- R<sub>i</sub> - inputovo orientovaná Russellova miera technickej efektívnosti
- R<sub>o</sub> - outputovo orientovaná Russellova miera technickej efektívnosti

Ako je zrejmé z tab. 2, radiálne miery technickej efektívnosti nadhodnocujú efektívnosť v priemere 5,7%. Inputové radiálne miery nadhodnocujú efektívnosť v priemere o 1,4% a outputové radiálne miery podhodnocujú efektívnosť v priemere o 2,1%.

Interpretácia vylepšených Russellových grafických mier technickej efektívnosti je nasledovná: napríklad  $R_e = 0,780$  pre producenta 1 indikuje, že pomer medzi priemernou efektívnosťou vstupov a výstupov je 0,780. Dekompozícia vylepšenej grafickej Russellovej miery

na inputové a outputové komponenty ukazuje, že existuje efektívny producent, resp. lineárna kombinácia producentov, ktorí produkujú v priemere o 14,2% výstupov viac ako producent 1 a v priemere používajú iba 89% vstupov.

## Závery

Príspevok hodnotí a porovnáva metodologické prístupy vedúce k výpočtu mier technickej efektívnosti. Osobitná pozornosť je venovaná tzv. globálnym mieram technickej efektívnosti, ktoré zohľadňujú tak radiálne, ako aj neradiálne zdroje neefektívnosti a teda vedú k mieram, ktoré sú v súlade s Koopmansovou definíciou efektívnosti. Vylepšená miera Russellovej grafickej miery technickej efektívnosti je vhodnou metodológiou pre riešenie problémov, kde DEA modely dávajú riešenie s nenulovými hodnotami odchýlkových premenných. Výhodou tejto miery v porovnaní s pôvodnou Russellovou grafickou mierou technickej efektívnosti je taktiež jednoznačná interpretovateľnosť vypočítaných mier efektívnosti ako aj jej dekomponovaných hodnôt priemernej inputovej a outputovej efektívnosti.

## Literatúra

- Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W., 1984. Some models for estimating technical and scale inefficiency in data envelopment analysis. *Management Science* 39/10, 1265-1273.
- Coelli, T.J., 1997. A multi-stage methodology for the solution of orientated DEA models. Paper presented to the Taipei international conference on efficiency and productivity growth, Taipei, June 20-21.
- Cooper, E.W., Seiford, L.M., Tone, K., 2000. *Data envelopment analysis. A comprehensive text with models, applications, references and DEA - solver software.* Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.
- Cooper, W.W., Pastor, J.T., 1995. Global efficiency measurement in DEA. Working paper, Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Alicante, Alicante.
- Debreau, G., 1951. The coefficient of resource utilization. *Econometrica* 19, 273-292
- Farrell, M.J., 1957. The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A* 120, 253-281.
- Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K., 1985. *The measurement of efficiency of production.* Kluwer-Nijhoff Publishing, Dordrecht.
- Färe, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K., 1994. *Production Frontiers.* Cambridge University Press, New York.
- Färe, R., Lovell, C.A.K., Zieschang, K., 1983. Measuring the technical efficiency of multiple output production technology. In: W.Eichhorn, K. Neumann, R. Shepard (Eds.), *Quantitative Studies on Production and Prices.* Physica-Verlag, Wurzburg, 159-171.
- Färe, R., Lovell, C.A.K., 1978. Measuring the technical efficiency of production. *Journal of Economic Theory* 19, 150-162.
- Charnes, A., Cooper, W.W., Golany, B., Seiford, L.M., Stutz, J., 1985. Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions. *Journal of Econometrics* 30 (12), 91-127.
- Charnes, A., Rhodes, E., 1978. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research* 2, 429-444.

- Koopmans, T.C., 1951. An analysis of production as an efficient combination of activities. In: Koopmans, T.C. (Eds.), *Activity Analysis of Production and Allocation*. Wiley, New York.
- Pastor, J.T., Ruiz, J.L., Sirvent, I., 1999. An enhanced DEA Russell graph efficiency measure. In: *European Journal of Operations Research* 115 (1999), 596-607.