# RIEŠENIE SÚSTAVY DVOCH ROVNÍC S DVOMA NEZNÁMYMI (POZNÁMKY K PRIBLIŽNÉMU RIEŠENIU)

**Zoltán Zalabai, SR - Milan Pokorný, SR**

**Abstrakt**
V článku sa zaoberáme využitím vlastných počítačových programov na približné riešenie sústavy dvoch rovníc s dvoma neznámymi. Článok obsahuje opis použitej metódy a ukážku jej použitia na konkrétnom príklade. Použitá metóda sa zakladá na využití postupnosti zjemnení štvorcovej siete na zužovanie oblasti, v ktorej sa riešenie sústavy (bod) nachádza. Štvorce zjemnení pôvodnej siete sú zväčšované tak, aby vyplnili celú obrazovku počítača.

**Kľúčové slová:** Sústavy rovníc, približné riešenie (koreň), počítačové programy.

**Úvod**

Riešenie sústavy dvoch rovníc s dvoma neznámymi patrí medzi pomerne často sa vyskytujúce úlohy. Napr. pri hľadaní extrémov funkcie dvoch premenných pri určovaní stacionárnych bodov treba riešiť takúto sústavu. Presné riešenie $[x_0, y_0]$ sa v mnohých prípadoch nepodarí určiť. Preto sa uspokojíme s nájdením približného riešenia sústavy – určíme $x_0, y_0$ s požadovanou presnosťou.

**Metóda približného riešenia sústavy dvoch rovníc s dvoma neznámymi**

Sústavu zapisujeme takto:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= 0 \\ G(x,y) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Z uvedených vzťahov vyjadríme dve funkcie dvoch reálnych premenných:

$$z = F(x,y) \text{ a } z = G(x,y) \tag{2}$$

Rovnicou $F(x,y)=0$ je určená rovinná krivka, takisto aj rovnicou $G(x,y)=0$. Súradnice spoločného bodu P týchto kriviek, teda dvojica $[x_0, y_0]$, je riešením (koreňom) sústavy (1).

**Príklad**

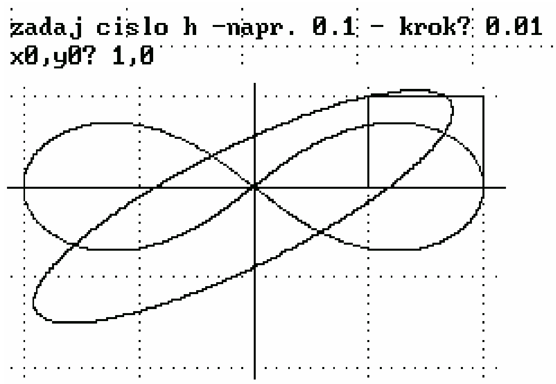
Riešme sústavu:

$$\begin{aligned} &\left(x^2+y^2\right)^2 - 4.\left(x^2-y^2\right) = 0 \\ &3x^2+6y^2-7xy-x+2y-3=0 \end{aligned}$$

**Riešenie**

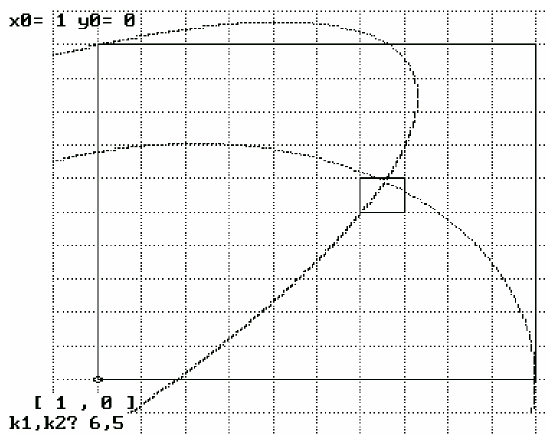
$$\begin{aligned} F(x,y) &= \left(x^2+y^2\right)^2 - 4\left(x^2-y^2\right) \\ G(x,y) &= 3x^2+6y^2-7xy-x+2y-3 \end{aligned}$$

Rovnica $F(x,y)=0$ určuje krivku $c_1$, rovnica $G(x,y)=0$ určuje krivku $c_2$. Počítač vykreslí tieto krivky (pozri obr. 1). Počet spoločných bodov oboch kriviek je 4. Jeden z nich leží vo štvorci súradnicovej siete, ktorého ľavý dolný vrchol je v bode $[1,0]$. Ide o štvorcovú sieť, pričom dĺžka strany malých štvorcov je 1. Aké sú súradnice tohto spoločného bodu? Označme $x_0=1$, $y_0=0$ (nepoznáme desatiny, stotiny, ...). Je to hrubý odhad skutočných súradníc s chybou menšou ako $10^0=1$.




Obr. 1

Dĺžku strany vyznačeného štvorca zväčšíme desaťkrát a zostrojíme k nemu zjemnenie štvorcovej siete. Dĺžka strany štvorcov zjemnenia siete je 0,1. Hľadaný spoločný bod sa nachádza v tomto štvorci – je to spoločný bod kriviek $c_1$ a $c_2$. O jeho súradniciach však vieme už viac! Podľa obr. 2 dostaneme odhad (už presnejší): $x_0=1{,}6$; $y_0=0{,}5$.

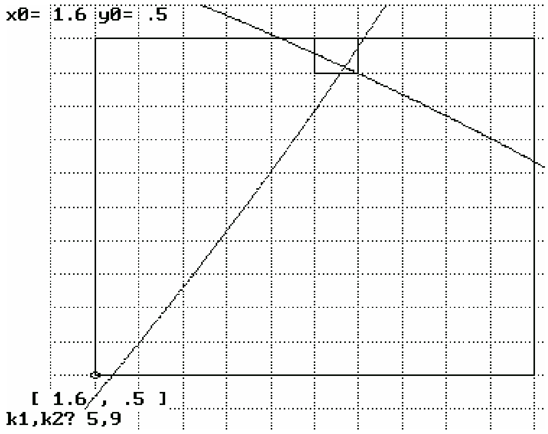



Obr. 2

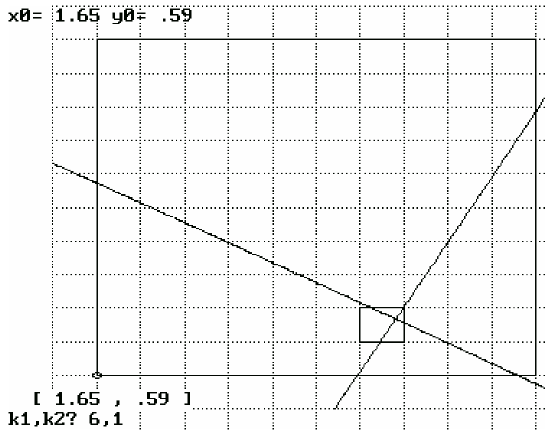
Dĺžku strany príslušného štvorca prvého zjemnenia siete, v ktorom sa spoločný bod nachádza, zväčšíme desaťkrát (pozri obr. 3) a v druhom zjemnení pôvodnej siete získame presnejší odhad: $x_0=1{,}65$; $y_0=0{,}59$. Pokračujeme v procese zjemňovania siete, čím postupne získame spresnené odhady:

podľa obr. 4: $x_0=1{,}656$; $y_0=0{,}591$,

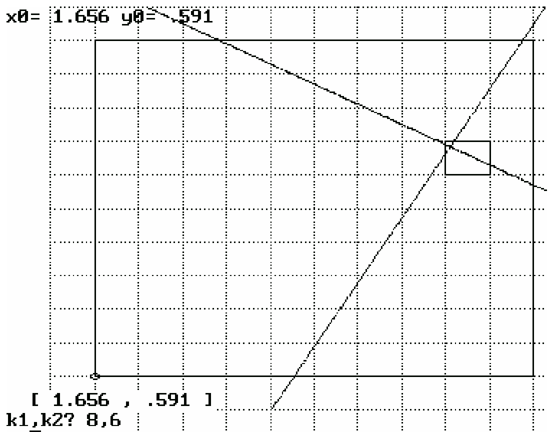
podľa obr. 5: $x_0=1{,}6568$; $y_0=0{,}5916$.



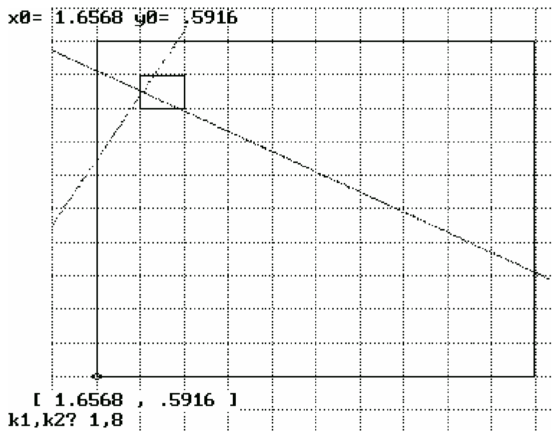

Obr. 3




Obr. 4




Obr. 5




Obr. 6

**x0= 1.65681 y0= .59168**

Obr. 7

Proces ukončíme v piatom zjemnení pôvodnej siete (obr. 6): $x_0 = 1{,}65681$; $y_0 = 0{,}59168$. Tieto hodnoty v „čistopise" sú na obr. 7. Chyba pri výpočte oboch súradníc je menšia ako $10^{-5}$.

Sústava (1) má štyri riešenia (korene). Počet spoločných bodov uvedených dvoch kriviek je 4. Jedno riešenie sme našli (obr. 2 – 7). Ďalšie tri by sme našli obdobným spôsobom. Všetky hľadané riešenia teda sú:

$x_0 = 1{,}65681 \quad ; \quad y_0 = 0{,}59168$

$x_0 = -1{,}55447 \quad ; \quad y_0 = -0{,}64331$

$x_0 = -0{,}36256 \quad ; \quad y_0 = 0{,}34076$

$x_0 = 0{,}58342 \quad ; \quad y_0 = -0{,}50251$

Keby existoval „milimetrový“, „mikrónový“, „nanometrový“ papier, na ktorom by sme mali vytlačenú veľmi jemnú štvorcovú sieť, stačilo by zobrať lupu, vyhľadať spoločné body a „odrátať“ jeho súradnice!

Uvedené myšlienky je možné využiť na napísanie akejsi pracovnej verzie programu pre počítač. Program je uvedený v tabuľke č. 1. Je písaný v jazyku GW – BASIC a je ho možné získať prostredníctvom e-mailu od autorov.

```
10 SCREEN 9
20 WINDOW (-5,-4)-(5,4)
25 INPUT "zadaj cislo h – napr. 0.1 – krok";H
35 LINE (-10,0)-(10,0)
40 LINE(0,-8)-(0,8)
45 FOR I=-10 TO 10
50 FOR J=-10 TO 10 STEP .1
55 PRESET (I, J), 15
56 PRESET (J,I), 15
60 NEXT J
65 NEXT I
160 DEF FN F(X,Y)= (X^2+Y^2)^2-4*(X^2-Y^2)
161 DEF FN G(X,Y)= 3*X^2+6*Y^2-7*X*Y-X+2*Y-3
170 FOR X=-3 TO 3 STEP H
175 FOR Y=-3 TO 3 STEP H
180 IF FN F(X,Y)*FN F(X,Y+H)<0   THEN PRESET (X,Y),10
190 IF FN G(X,Y)*FN G(X,Y+H)<0  THEN PRESET (X,Y),14
195 NEXT Y
200 NEXT X
210 FOR Y=-3 TO 3 STEP H
215 FOR X=-3 TO 3 STEP H
220 IF FN F(X,Y)*FN F(X+H,Y)<0  THEN PRESET (X,Y),10
230 IF FN G(X,Y)*FN G(X+H,Y)<0  THEN PRESET (X,Y),14
235 NEXT X
240 NEXT Y
241 INPUT "x0,y0";X0,Y0
242 LINE (X0,Y0)-(X0+1,Y0),14: LINE (X0+1,Y0)-(X0+1,Y0+1),14:
243 LINE (X0+1,Y0+1)-(X0,Y0+1),14: LINE (X0,Y0+1)-(X0,Y0),14
244 INPUT Q0
247 PAINT (X0+0.17,Y0+0.19),14,14
248 INPUT Q0
249 CLS
250 FOR N=1 TO 5
260 DATA 1,0.1,0.01,0.1,0.01,0.001,0.01,0.001,0.0001,0.001,0.0001,0.00001,0.0001,0.00001,0.000001
270 READ D,H,H1
275 WINDOW (X0-3*H,Y0-2*H)-(X0+D+H,Y0+D+H)
289 CLS
290 PRINT "x0=";X0;"y0=";Y0
310 FOR I=X0-H TO X0+D+2*H STEP H
311 FOR J=Y0-2*H TO Y0+D+2*H STEP H/10
312 PRESET (I,J),15
313 NEXT J
314 NEXT I
315 FOR J=Y0-H TO Y0+D+2*H STEP H
316 FOR I=X0-H TO X0+D+2*H STEP H/10
317 PRESET (I,J),15
318 NEXT I
319 NEXT J
320 LINE (X0,Y0)-(X0+D,Y0)
321 LINE (X0,Y0)-(X0,Y0+D)
322 LINE (X0+D,Y0)-(X0+D,Y0+D)
323 LINE (X0,Y0+D)-(X0+D,Y0+D)
```

```
325  LOCATE 21,7:PRINT "[";X0;",";Y0;"]"
326  CIRCLE (X0,Y0),H1
327  H2=H1/4
330  FOR X=X0-H TO X0+D+H STEP H2
331  FOR Y=Y0-H TO Y0+D+H STEP H2
335  IF FN F(X,Y)*FN F(X,Y+H2)<0  THEN PRESET (X,Y),10
336  IF FN G(X,Y)*FN G(X,Y+H2)<0  THEN PRESET (X,Y),14
340  NEXT Y
341  NEXT X
349  GOTO 365
350  FOR Y=Y0-H TO Y0+D+H STEP H2
351  FOR X=X0-H TO X0+D+H STEP H2
355  IF FN F(X,Y)*FN F(X+H2,Y)<0  THEN PRESET (X,Y),10
356  IF FN G(X,Y)*FN G(X+H2,Y)<0  THEN PRESET (X,Y),14
360  NEXT X
361  NEXT Y
365  INPUT "K1,K2";K1,K2
366  X0=X0+K1*H: YO=Y0+K2*H
370  LINE (X0,Y0)-(X0+H,Y0),14: LINE (X0+H,Y0)-(X0+H,Y0+H),14
371 LINE (X0+H,Y0+H)-(X0,Y0+H),14: LINE (X0,Y0+H)-(X0,Y0),14: INPUT Q0
372  PAINT (X0+H/2,Y0+H/2),14,14
373  INPUT Q0
400  NEXT N
520  PRINT "x0=";X0;"y0=";Y0
```

Tabuľka č.1

## Záver

Článok ilustruje využitie vlastného softvéru pri hľadaní približného riešenia (koreňa) sústavy dvoch rovníc s dvoma neznámymi metódou postupného zužovania oblasti, v ktorej sa nachádza koreň. Metóda sa zakladá na postupnom zjemňovaní súradnicovej štvorcovej siete a jej zväčšovaní lupou na dispozíciu obrazovky.

## Literatúra


[1] Dávid, A.: Numerické metódy na osobnom počítači. ALFA, Bratislava (1988).
[2] Kuroš, A.G.: Kurs vyššej algebry. 7. vydanie, Moskva (1962).
[3] Olehla, J. – Olehla, M.: BASIC u mikropočítačů. Nadas, Praha (1988).
[4] Palumbíny, D. – Palumbíny, O.: Algebra 2. UKF, Nitra (2002). ISBN 80-8050-545-4
[5] Schwarz, Š.: Základy náuky o riešení rovníc. SAV, Bratislava (1968).
[6] Zalabai, Z.: Informácia o koreňoch rovnice. Zborník vedeckých prác ACTA MATHEMATICA 4, UKF, Nitra (1997).


## Adresa autorov


prof. RNDr. Zoltán Zalabai, CSc., Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita, Priemyselná 4, P. O. Box 9, 918 43 Trnava
E-mail: zzalabai@truni.sk
PaedDr. Milan Pokorný, Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita, Priemyselná 4, P. O. Box 9, 918 43 Trnava
E-mail: mpokorny@truni.sk

# SOLVING A SYSTEM OF TWO EQUATIONS WITH TWO VARIABLES

**Abstract**
The paper deals with designing our own software which can be used to solve a system of two equations with two variables. These systems play an important role in many mathematical tasks, for example in finding local extremes of a function with two variables. However, in some cases it could be really difficult to find an exact solution. Therefore we are often satisfied with finding only an approximate value of the solution. The paper demonstrates the process of solving a concrete system of two equations with two variables, where both equations are polynomials. The method of the solution is based on drawing the curves which correspond to the equations. Points of intersection of the curves represents solutions of the system. We chose the plane square net for one of the roots and make more and more accurate approximation by decreasing squares which contain the root. A precision of the approximation could be reached by sequential refinements of the basic square net. The approximate values of other roots could be found similarly. A code written in the language GW-BASIC can be found at the end of the paper.

**Key words:** System of Two Equations, Approximate Solution, Mathematical Software.

Oponoval: prof. RNDr. Ján Čižmár, PhD.