

# KONGESCIA AKO FAKTOR EFEKTÍVNOSTI A JEJ MERANIE METÓDAMI MATEMATICKÉHO PROGRAMOVANIA

## CONGESTION AS AN EFFICIENCY FACTOR AND ITS MEASURING WITH METHODS OF MATHEMATICAL PROGRAMMING

FANDEL Peter, (SR)

---

### ABSTRACT

The term congestion is known in current language predominantly in connection with traffic and networks. In microeconomic theory the term names the situation when production inputs are used in such an extent, that their increase (decrease) causes decrease (increase) of the outputs. In other words congestion arises when an input is overused such that marginal productivity becomes negative. In the paper we describe alternative approaches to measuring congestion with the use of mathematical programming methods. We present two procedures based on application of radial and additive data envelopment analysis models which lead to estimation of congestion efficiency.

### KEY WORDS

efficiency, congestion and economies of scale, data envelopment analysis

---

### ÚVOD

Pojem kongescia je v bežnej reči známy predovšetkým z dopravy a počítačových sietí. Bežne sa stretávame s pojmi napr. dopravná zápcha alebo zahltenie počítačovej siete. V ekonomickej teórii tento pojem pomenúva jav, keď výrobné vstupy sa používajú v takom objeme, že ich nárast (pokles) spôsobuje zníženie (zvýšenie) objemu výstupov, inými slovami keď marginálna produktivita nadobúda zápornú hodnotu. Aj keď v ekonomickej terminológii patrí tento termín medzi základné pojmy produkčnej ekonomiky, v empirických analýzach sa mu venuje pomerne malá pozornosť. Je to spôsobené tým, že kongescia je jav veľmi špecifický, ktorý sa v produkčných systémoch vyskytuje iba vo zvláštnych prípadoch.

Ako príklad kongescie z literatúry orientovanej na produkčné systémy možno uviesť situáciu, keď odbory pôsobia proti redukcii zamestnancov ako premennej vstupov (Coelli et al., 1988). Iným príkladom je, keď štát reguluje úroveň rôznych vstupov. Toto je pomerne časté predovšetkým v tzv. transformujúcich sa a hybridných ekonomikách, ako je napríklad čínska alebo indická ekonomika, keď štát chce zásahmi riešiť zamestnanosť (Balakrishnan, Sonderstrom, 2000; Brockett, Cooper, Shin, Wang, 1998; Cooper, Deng, Gu, Li, Thrall, 2001; Deng, 2003). Pre poľnohospodárstvo je typickým prípadom kongescie napr. nadmerné použitie hnojív.

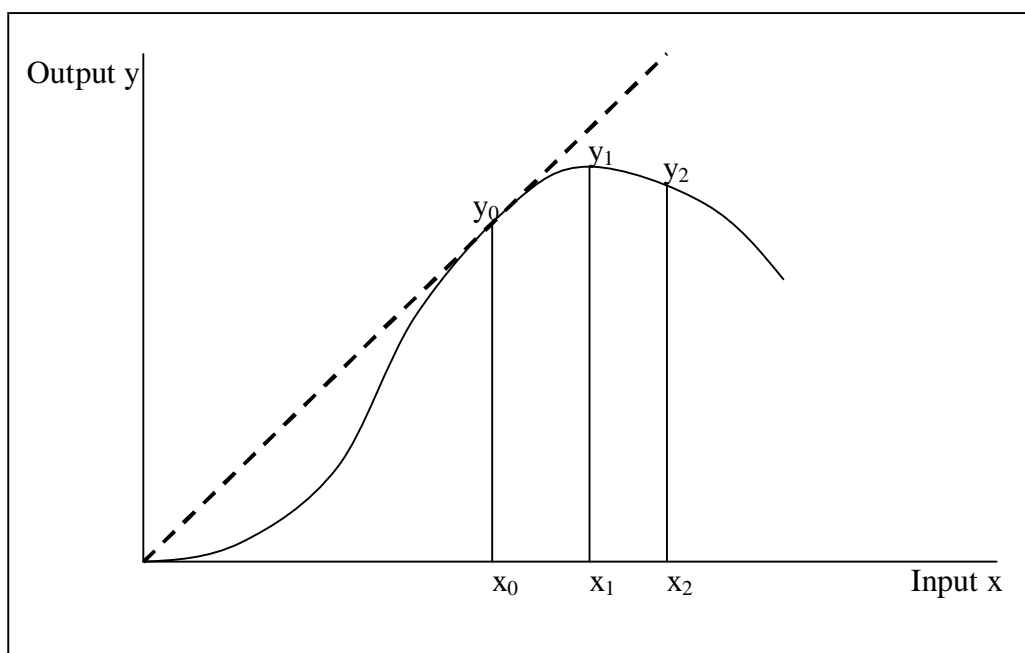
Často sa kongescia hodnotí v nevýrobných systémoch, ako sú napríklad vzdelávacie inštitúcie. V tejto oblasti je v ekonomike vzdelávania dobre popísaný príklad kongescie na britských univerzitách, keď v období rokov 1980-1993 počet študentov rástol omnoho rýchlejšie ako počet učiteľov, čo spôsobilo zníženie výstupu univerzít v oblasti výskumu a udelených akademických hodností (Flegg, Allen, 2005). Niečo podobné by bolo možné pravdepodobne identifikovať i v slovenskom vysokom školstve v období výberu školného od študentov externých foriem štúdia, čo v tom čase viedlo k významnému nárastu ich počtu.

Cieľom predkladaného príspevku je charakterizovať pojem kongescie a na základe poznatkov publikovaných v ostatom čase charakterizovať alternatívne postupy odhadu mier kongescie pomocou metód matematického programovania.

## DEFINÍCIA POJMU KONGESCIA

Kongescia je jav, ktorý nastáva vtedy, keď output, ktorý je maximálne dosiahnuteľný, možno zväčšiť redukovaním jedného alebo viacerých inputov bez zlepšenia ostatných inputov alebo outputov. Naopak, kongescia nastáva i vtedy, keď niektorý z outputov, ktorý je maximálne dosiahnuteľný, možno redukovať zvýšením jedného alebo viacerých inputov bez zlepšenia ostatných inputov alebo outputov (Cooper, Deng, Seiford, Zhu, 2004).

Graficky to možno vyjadriť pomocou obrázku 1 vychádzajúc z teórie klasickej produkčnej ekonomiky. V priestore jeden vstup – jeden výstup krivka zobrazená na obrázku vyjadruje vzťah množstva vstupu a jemu zodpovedajúceho množstva výstupu. Táto krivka, nazývaná tiež produkčná funkcia, sa používa na vyjadrenie maximálneho výstupu pri danej úrovni vstupu. Z uvedeného tvrdenia vyplýva, že pod hranicou tvorenou funkciou sa nemôže nachádzať žiadna aktivita. Ako je zrejmé z obrázku, pri raste množstva vstupu do úrovne  $x_0$  rastúcou mierou stúpa i výstup až po úroveň  $y_0$ . Pri raste množstva vstupu z úrovne  $x_0$  až po úroveň  $x_1$  naďalej rastie výstup, ale už klesajúcou mierou, kým nedosiahne  $y_0$ . Použitie ďalšieho množstva vstupu má za následok pokles výstupu. Pri úrovni vstupu  $x_2$  je výstup  $y_2$ , pre ktorý platí  $y_2 < y_1$  a rozdiel  $y_2 - y_1$  predstavuje stratu výstupu v dôsledku kongescie.



Obrázok 1 Produkčná funkcia (podľa Cooper et al., 2004)

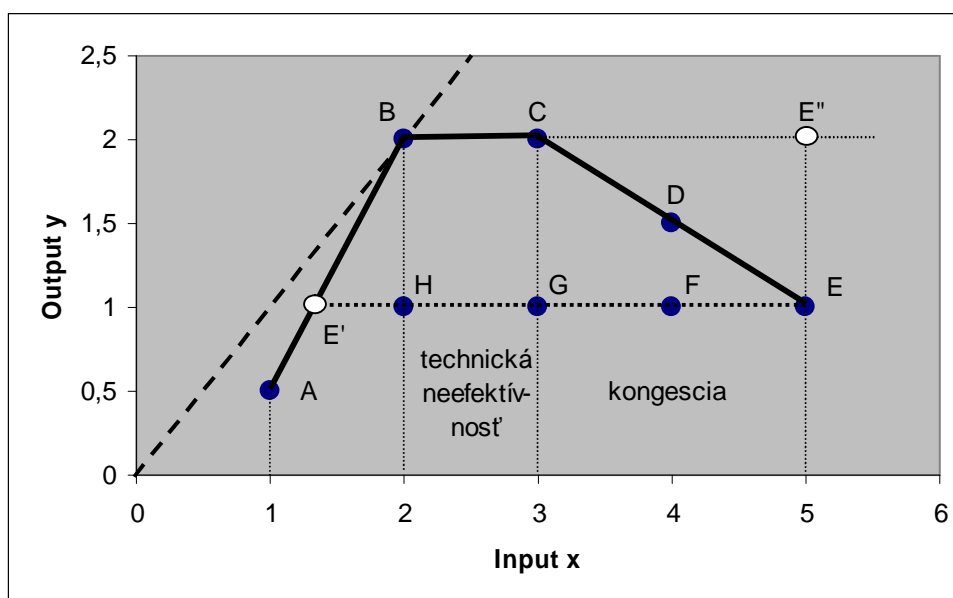
Tento princíp možno rozšíriť i na prípad, keď predpokladáme neefektívnosť, tj. keď určité kombinácie vstupu a výstupu ležia pod hranicou danou produkčnou funkciou. Takýto prístup je charakteristický pre analýzu dátových obalov (DEA), v ktorej produkčná funkcia je nahradená hranicou efektívnosti vo forme lomenej čiary. Na obrázku 2 je zobrazená táto hranica pre osem hodnotených rozhodovacích jednotiek A, B, C, D, E, F, G a H.

## MERANIE KONGESCIE

V štandardnej analýze efektívnosti pomocou DEA predpokladáme silnú disponibilitu<sup>1</sup> vstupov, resp. výstupov a v závislosti od toho, aké výnosy z rozsahu predpokladáme, vytvárame hranicu efektívnosti. Za predpokladu konštantných výnosov z rozsahu (KVR) je hranica efektívnosti tvorená polpriamkou 0B, za predpokladu variabilných výnosov z rozsahu

<sup>1</sup> Silná (voľná) disponibilita vstupov znamená, že s nevyužitím nadbytočných vstupov nie sú spojené žiadne náklady. Podobne by bolo možné charakterizovať silnú disponibilitu výstupov.

je hranicou efektívnosti hrana AB. Ak predpokladáme že pre vstupy a výstupy platí predpoklad slabej disponibility, hranicou efektívnosti je lomená čiara BCDE. Na segmente spájajúcom body A a B nie je možné zvýšiť výstup bez zvýšenia vstupu a rozhodovacie jednotky zodpovedajúce bodom segmentu spĺňajú podmienky Pareto-Koopmansovej efektívnosti (Cooper et al., 2002, s.45). Segment BC predstavuje tú časť hranice efektívnosti, na ktorej zvyšovaním vstupu zostáva výstup nezmenený. Obdobne segment 1A predstavuje tú časť hranice efektívnosti, na ktorej zvyšovaním výstupu zostáva vstup nezmenený. Rozhodovacie jednotky zodpovedajúce bodom týchto dvoch segmentov spĺňajú podmienky tzv. slabej efektívnosti (Cooper et al., 2002, s.45). Segment spájajúci body CDE predstavuje oblasť kongescie hranice efektívnosti. Táto časť hranice má opačné vlastnosti segmentu AB: nie je možné zvýšiť výstup bez zníženia vstupu.



Obrázok 2 Hranica efektívnosti v DEA

Na obrázku 2 budeme demonštrovať princíp hodnotenie efektívnosti z hľadiska výstupu na bode F, G a H. Všetky body ležia pod hranicou efektívnosti. Ak premietneme bod H vertikálne na hranicu efektívnosti, jeho priemetom je bod B. Z uvedeného je zřejmé, že rozhodovacia jednotka H je technicky neefektívna, pretože vzhľadom na svoj vstup 2 jednotky by mohla dosiahnuť výstup až 2 jednotky. Priemetom bodu G na hranicu efektívnosti je bod C, z čoho vyplýva, že pri úrovni vstupu 3 jednotky je možné dosiahnuť výstup až 2 jednotky. Bod B však reprezentuje takú istú úroveň výstupu, ktorú však dosahuje pri vstupe iba 2 jednotky. Z uvedeného vyplýva, že rozhodovacia jednotka G by mala redukovať svoj vstup o prebytok jednej jednotky a zväčšiť svoj výstup dvojnásobne.

Teraz posúdime bod F. Jeho horizontálna projekcia na segment AB hranice efektívnosti ukazuje, že je možné znížiť vstup na úroveň bodu E' bez zhoršenia výstupu. Tento prístup z hľadiska vstupu umožňuje identifikovať iba technickú neefektívnosť. Ak však použijeme outputovo orientovaný prístup a premietneme tento bod vertikálne na hranicu efektívnosti do bodu D, je zřejmé, že rozhodovacia jednotka F môže bez zmeny vstupu zvýšiť výstup na úroveň bodu D, tj na 1,5 jednotky. Ako je však zřejmé zo sklonu hranice efektívnosti je možné i ďalšie zvyšovanie výstupu a to znižovaním vstupu bodu D až na úroveň vstupu bodu C. Rozdiel medzi vstupom bodu F a vstupom bodu C predstavuje veľkosť kongescie vstupu, ktorý používa rozhodovacia jednotka F. Rozdiel medzi súradnicou výstupu bodu F

a súradnicou výstupu bodu C reprezentuje tú časť výstupu, ktorá bola stratená nielen v dôsledku kongescie, ale aj v dôsledku zlého riadenia, čo vedie technickej neefektívnosti.

Na meranie kongescie sú dnes v literatúre známe dva základné prístupy. Prvý bol odvodený autorským kolektívom Färe, Grosskopf a Lowell (FLG), prvýkrát vo finalizovanej podobe publikovaný v práci FLG (1985) a neskoršie rozpracovaný v práci GLF (1994). V tom čase to bol jediný DEA prístup, ktorý bol k dispozícii k analýze kongescie a preto bol mnohokrát aplikovaný. Druhý prístup formulovali Cooper, Thompson a Trall (CTT, 1996), ktorý má viacero alternatív, ako aj množstvo aplikácií.

FLG prístup pozostáva z dvoch etáp. V prvej etape sa rieši VVR DEA model (inputový alebo outputový) za predpokladu silnej disponibilít (S) vstupov a výstupov a v druhej etape sa rieši model DEA za predpokladu slabej disponibilít (W) vstupov a výstupov.

V prípade aplikácie inputovo orientovaných modelov (DEA<sub>i</sub>) v prvej a druhej etape sa riešia nasledovné modely:

1. etapa – DEA <sub>i</sub> (VVR, S)	2. etapa – DEA <sub>i</sub> (VVR, W)
$\theta^* = \min \theta$ za podm. $\sum_j x_{ij} \lambda_j \leq \theta x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m$ $\sum_j y_{rj} \lambda_j \geq y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$ $\sum_j \lambda_j = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$ $\lambda_j \geq 0$ <div style="text-align: right;">(1)</div>	$\beta^* = \min \beta$ za podm. $\sum_j x_{ij} \lambda_j = \beta \sigma x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m$ $\sum_j y_{rj} \lambda_j \geq y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$ $\sum_j \lambda_j = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$ $\lambda_j \geq 0$ $0 \leq \sigma \leq 1$ <div style="text-align: right;">(2)</div>

Notácia:

- $x_{ij}$  vstupy i-teho druhu, j-tej rozhodovacej jednotky
- $y_{rj}$  výstupy r- teho druhu, j-tej rozhodovacej jednotky
- $x_{io}$  vstupy i- teho druhu hodnotenej rozhodovacej jednotky
- $y_{ro}$  výstupy r- teho druhu hodnotenej rozhodovacej jednotky
- $\lambda_j$  intenzitné premenné

Hodnotená rozhodovacia jednotka RJ<sub>o</sub> je technicky efektívna vtedy a len vtedy, ak  $\theta^* = 1$ . Technická neefektívnosť je prítomná vtedy, ak  $0 \leq \theta^* < 1$ .

Táto definícia ignoruje možnosť existencie zdroja neefektívnosti, ktorý na obrázku 2 predstavuje prebytok vstupu bodu C v porovnaní s bodom B. Táto definícia preto spĺňa iba kritérium slabej efektívnosti.

Model DEA<sub>i</sub> (VVR,W) predstavuje nelineárny problém, ktorý možno linearizovať ak položíme  $\sigma = 1$ , bez toho, že by sa tým zmenili hodnoty  $(\beta, \lambda)$  (Färe et al., 1994, s. 73). Jeho obmedzujúce podmienky sú prísnejšie, z čoho vyplýva  $0 \leq \theta^* \leq \beta^*$ . FLG využili túto vlastnosť k vyjadreniu miery kongescie

$$0 \leq C(\theta^*, \beta^*) = \theta^* / \beta^* \leq 1.$$

Kongescia je vo výkonnosti hodnotenej rozhodovacej jednotky  $RJ_o$  prítomná vtedy a len vtedy, ak  $C(\theta^*, \beta^*) < 1$

Kongescia nie je vo výkonnosti hodnotenej rozhodovacej jednotky  $RJ_o$  prítomná vtedy a len vtedy, ak  $C(\theta^*, \beta^*) = 1$ .

V prípade aplikácie outputovo orientovaných modelov ( $DEA_o$ ) v prvej a druhej etape sa riešia nasledovné modely:

1. etapa – $DEA_o(VVR, S)$	2. etapa – $DEA_o(VVR, W)$
$\varphi^* = \max \varphi$ za podm. $\sum_j x_{ij} \lambda_j \leq x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m$ $\sum_j y_{rj} \lambda_j \geq \varphi y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$ $\sum_j \lambda_j = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$ $\lambda_j \geq 0$ <div style="text-align: right;">(3)</div>	$\beta^* = \max \beta$ za podm. $\sum_j x_{ij} \lambda_j \leq x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m$ $\mu \sum_j y_{rj} \lambda_j = \beta y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$ $\sum_j \lambda_j = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$ $\lambda_j \geq 0$ $0 \leq \mu \leq 1$ <div style="text-align: right;">(4)</div>

Hodnotená rozhodovacia jednotka  $RJ_o$  je technicky efektívna vtedy a len vtedy, ak  $\theta^* = 1$ .

Technická neefektívnosť je prítomná vtedy, ak  $1 \leq \varphi^* < +\infty$

Táto definícia taktiež spĺňa iba kritérium slabej efektívnosti.

Nelineárny model  $DEA_o(VVR, W)$  možno linearizovať ak položíme  $\mu = 1$ , bez toho, že by sa tým zmenili hodnoty  $(\beta, \lambda)$  (Färe et al., 1994, s.108). Jeho obmedzujúce podmienky sú prísnejšie, z čoho vyplýva  $1 \leq \beta^* \leq \varphi^*$ . FLG využili túto vlastnosť k vyjadreniu miery kongescie

$$1 \leq C(\theta^*, \beta^*) = \varphi^* / \beta^* \leq +\infty.$$

Kongescia je vo výkonnosti hodnotenej rozhodovacej jednotky  $RJ_o$  prítomná vtedy a len vtedy, ak  $C(\theta^*, \beta^*) > 1$

Kongescia nie je vo výkonnosti hodnotenej rozhodovacej jednotky  $RJ_o$  prítomná vtedy a len vtedy, ak  $C(\theta^*, \beta^*) = 1$ .

Cooper, Thomson a Thrall (1996) predstavili iný model model pre analýzu kongescie. Tento bol neskôr rozpracovaný v prácach Brouckett et al. (1988) a Cooper, Deng, Gu, Li et al. (2000). Ich prístup je taktiež viacetapový. V prvej etape sa rieši outputovo orientovaný DEA model pre výpočet Pareto-Koopmansovej efektívnosti. Ide o model, ktorý používa odchýlkové premenné  $s^-$  a  $s^+$  pre vyjadrenie zdrojov neradiálnej neefektívnosti (viď segment BC na obrázku 2), ktoré predstavuje prebytok vstupov a deficit výstupov. Model pre 1. etapu má tvar:

$$\max \varphi_o + \varepsilon (\sum_r s_r^+ + \sum_i s_i^-)$$

za podm.

$$\begin{aligned} \sum_j x_{ij} \lambda_j + s_i^- &\leq x_{io} & i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_j y_{rj} \lambda_j - s_r^+ &\geq \varphi y_{ro} & r = 1, 2, \dots, s \\ \sum_j \lambda_j &= 1 & j = 1, 2, \dots, n \\ \lambda_j, s_r^+, s_i^- &\geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Účelová funkcia v tomto modeli DEA je v literatúre známa ako integrovaný zápis dvoch fáz, keď v prvej fáze sa maximalizuje  $\varphi_o$  a v druhej fáze sa maximalizuje súčet odchýlkových premenných.

V 2. etape CTT postupu sa podľa úpravy Brockett et al. (1998) rieši nasledovný model:

$$\begin{aligned} & \max \sum_i \delta_i^- \\ & \text{za podm.} \\ & \sum_j x_{ij} \hat{\lambda}_j - \delta_i^- = \hat{x}_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & \sum_j y_{rj} \hat{\lambda}_j \geq \hat{y}_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s \\ & \sum_j \hat{\lambda}_j = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & s_i^{-*} \geq \delta_i^- \\ & \hat{\lambda}_j, \delta_i^- \geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

kde  $\hat{y}_{ro}, \hat{x}_{io}$  reprezentujú súradnice bodu na hranici efektívnosti, voči ktorému sa hodnotí RJ<sub>o</sub>. Tieto sa získajú riešením (5) a majú nasledovné hodnoty:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{io} &= x_{io} - s_i^{-*} \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \hat{y}_{ro} &= \varphi_o^* y_{ro} + s_r^{+*} \quad r = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (7)$$

Treba upozorniť, že v inputových podmienkach v (6) majú odchýlkové premenné  $s_i^-$  opačné znamienko ako odchýlkové premenné  $\delta_i^-$  v inputových podmienkach v (5). Cieľom riešenia modelu (6) je maximalizovať súčet inputových odchýlok pri zohľadnení dodatočnej podmienky  $s_i^{-*} \geq \delta_i^-$ , ktorá limituje hodnoty odchýlkových premenných maximálne do úrovne odchýlkových premenných získaných riešením modelu (5). Rozdiely možno vyjadriť nasledovne

$$s_i^{-c} = s_i^{-*} - \delta_i^{-*}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

kde pre každé  $i = 1, 2, \dots, m$  vypočítame  $\delta_i^{-*}$  riešením (6) po tom, čo zo vstupov  $x_{io}$  bolo odpočítané  $s_i^{-*}$  v (7).

Kladné hodnoty  $s_i^{-c}$  rozsah kongescie v každom z  $i = 1, 2, \dots, m$  vstupov, kým  $\delta_i^{-*} \geq 0$  vyjadrujú zodpovedajúci komponent technickej neefektívnosti. Ak  $s_i^{-*}$  označíme „celková odchýlka“ (ako výsledok riešenia modelu (5)), potom  $s_i^{-*} = s_i^{-c} + \delta_i^{-*}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Z uvedeného vyplýva, že „celková odchýlka“ získaná riešením modelu (5) sa dá dekomponovať na dva komponenty aplikáciou (6) v druhej etape a to na obyčajnú technickú neefektívnosť v rozsahu  $\delta_i^{-*}$  a kongesciu v rozsahu  $s_i^{-c}$  podľa (8).

## POROVNANIE FLG A CTT PRÍSTUPU.

Oba prístupy k meraniu majú svoje výhody aj nevýhody. Najväčšou výhodou FLG prístupu je, že umožňuje prehľadným spôsobom dekomponovať celkovú technickú efektívnosť (TE KVR, S) na čistú technickú efektívnosť (TE VVR, S), efektívnosť z rozsahu (ER = TE KVR, S / TE VVR, S) a kongestívnu efektívnosť (KE = TE VVR, W / TE VVR, W):

$$TE \text{ KVR} = TE \text{ VVR} \times ER \times KE$$

Nevýhodou FLG prístupu je nutnosť poznať komplexne teoretické ekonomické východiská a s tým spojenú terminológiu. To rezultuje v obtiažnu interpretovateľnosť získaných výsledkov.

Výhodou CTT prístupu je, že teoreticky plne vychádza z teórie DEA. Z toho vyplýva základná pozitívna črta a to možnosť aplikovať všetky princípy a pojmy v zrozumiteľnej väzbe na použité dátové súbory. CTT miery kongescie sú ľahko pochopiteľné a analytik môže ihneď posúdiť, ktoré faktory spôsobujú problémy a v akom rozsahu. Informáciu tohto charakteru je pomerne zložitá získať aplikáciou FLG prístupu.

Nevýhodou neradiálneho CTT prístupu je, že neumožňuje priamym prehľadným spôsobom dekomponovať mieru celkovej efektívnosti. Vzhľadom k tomu, že v súčasnosti naďalej prebieha intenzívny výskum CTT modelov možno očakávať vyriešenie ich čiastkových nevýhod a ich prepojenie na radiálne modely. Určitý posun v tomto smere možno vidieť v tzv. unifikovanom aditívnom modeli autorov Cooper, Seiford a Zhu (2000), a úplne novom prístupe unifikovanom prístupe publikovanom autormi Tone a Sahoo (2004).

Unifikovaný aditívny model autorov Cooper, Seiford a Zhu (2000) nahrádza kombináciu radiálneho a aditívneho prístupu jednotným aditívnym prístupom vo všetkých etapách.

<p><u>1. etapa</u></p> <p><math>\max \sum_r (s_r^+ / y_{ro})/s + \varepsilon \sum_i (s_i^- / x_{io})/m</math></p> <p>za podm.</p> $\sum_j x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m$ $\sum_j y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$ $\sum_j \lambda_j = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$ $\lambda_j, s_r^+, s_i^- \geq 0$ <p style="text-align: right;">(9)</p>	<p><u>2. etapa</u></p> <p><math>\max \sum_i (s_i^- / x_{io})/m</math></p> <p>za podm.</p> $\sum_j x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m$ $\sum_j y_{rj} \lambda_j = \hat{y}_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$ $\sum_j \lambda_j = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$ $\lambda_j, s_i^- \geq 0$ <p style="text-align: right;">(10)</p>
<p><u>3. etapa</u></p> <p><math>\max \sum_i (\delta_i^- / x_{io})/m</math></p> <p>za podm.</p> $\sum_j x_{ij} \lambda_j - \delta_i^- = \hat{x}_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m$ $\sum_j y_{rj} \lambda_j = \hat{y}_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$ $\sum_j \lambda_j = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$ $s_i^* \geq \delta_i^-$ $\lambda_j, \delta_i^- \geq 0$ <p style="text-align: right;">(11)</p>	<p><u>4. etapa</u></p> <p><math>\max \sum_r (\delta_r^+ / y_{ro})/s</math></p> <p>za podm.</p> $\sum_j x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_{io} \quad i = 1, 2, \dots, m$ $\sum_j y_{rj} \lambda_j + \delta_r^+ = \hat{y}_{ro} \quad r = 1, 2, \dots, s$ $\sum_j \lambda_j = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$ $\lambda_j, s_i^-, \delta_r^+ \geq 0$ <p style="text-align: right;">(12)</p>

V modeli (9)  $\varepsilon > 0$  je nearchimediálna (infinitesimalná) hodnota, ktorej význam spočíva v tom, že sa najprv maximalizuje prvá časť účelovej funkcie a potom je druhá časť. Riešenie modelu (9) sa potom použije v modeli (10), kde  $\hat{y}_{ro} = y_{ro} + s_r^{+*}$ .

Riešením modelu (10) sa získa nová množina maximálnych inputových neradiálnych odchýlok konzistentných s upravenými outputmi. V ďalšej etape sa tak ako v modeli (6) maximalizujú inputové odchýlky. Tento výpočet sa realizuje v tretej etape modelom (11), kde  $x_{io} = x_{io} - s_i^{-*}$ , pričom  $s_i^{-*}$  sú optimálne inputové odchýlky získané riešením modelu (10). Podobne ako v modeli (6) rozsah kongescie možno vypočítať podľa vzťahu  $s_i^{-c} = s_i^{-*} - \delta_i^{-*}$ , kde  $s_i^{-c}$  reprezentuje kongesciu i-teho inputu. Redukcia outputov z dôvodu kongescie by mala byť zrejme z neefektívnosti. Formálne ho možno vypočítať riešením modelu (12), kde  $y_{ro}$  je definované ako v (10) a  $x_{io}$  sú pôvodné dáta ako v (9) a (10). Ak má model (9) jediné optimálne riešenie, potom modelom (12) možno jednoducho reprodukovať pôvodné dáta podľa vzťahu  $y_{ro} - \delta_r^{+*} = y_{ro}$ .

## ANOTÁCIA

Pojem kongescia je v bežnej reči známy predovšetkým z dopravy a počítačových sietí. Aj keď v ekonomickej terminológii patrí medzi základné pojmy produkčnej ekonómie, v empirických analýzách sa mu nevenuje dostatočná pozornosť. Uvedený pojem v ekonomickej teórii pomenúva jav, keď výrobné vstupy sa používajú v takom objeme, že ich nárast (pokles) spôsobuje zníženie (zvýšenie) objemu výstupov, inými slovami keď marginálna produktivita nadobúda zápornú hodnotu. V predkladanom príspevku charakterizujeme alternatívne postupy odhadu mier kongescie pomocou metód matematického programovania. Prezentované sú dva postupy založené na aplikácii radiálneho a aditívneho modelu analýzy dátových obalov, ktoré vedú k odhadu kongestívnej efektívnosti.

## KLÚČOVÉ SLOVÁ

efektívnosť, kongescia a ekonómia z rozsahu, analýza obalov dát

## LITERATÚRA

1. BALAKRISHNAN, R. - SODERSTROM, N.S.: The Cost Of System Congestion: Evidence From The Health Care Sector, In: Journal Of Management Accounting Research, 12, 97-114, 2000
2. BROCKET, P.L. - COOPER, W.W. - SHIN, H.C. - WANG, Y.: Inefficiency And Congestion In Chinese Production Before And After The 1978 Economic Reforms, In: Socio-Economic Planning Science, 32, 1-20, 1998
3. COELLI, T. – RAO, D.S. PRASADA – BATTESE, G.E.: An Introduction To Efficiency And Productivity Analysis. Boston: Kluwer, 1998, ISBN 0-7923-8062-2
4. COOPER, W.W - DENG, H.H - SEIFORD, L.M. - ZHU, J.: Congestion: Its Identification And Management With DEA. In: Handbook on Data Envelopment Analysis, Cooper, W.W., Seiford, L.M., Zhu, J. Editors. Boston, Kluwer, 2004, ISBN 1-4020-7797-1
5. COOPER, W.W - THOMPSON, R.G., THRALL, R.M.: Introduction: Extensions And New Developments In DEA, In: Annals of Operations Research, 66, s. 3-45
6. COOPER, W.W. - DENG, H. - GU, B. - LI, S. - THRALL, R.M.: Using DEA To Improve The Management Of Congestion In Chinese Industry (1981-1997), In: Socio-Economic Planning Science, 35, 1-16, 2001
7. COOPER, W.W. – SEIFORD, L.M. – TONE, K.: Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2002, ISBN 0-7923-208693-0



8. COOPER, W.W. – SEIFORD, L.M. –ZHU, J.: A Unified Additive Model Approach for Evaluating Inefficiency and Congestion with Associated Measures in DEA. In: Socio-Economic Planning Sciences, 34, s. 1-25
9. DENG, H.H.: Congestion And Its Management In Chinese Production. PhD Thesis, Austin, Texas: The Red McCombs School of Business, University of Texas at Austin, 2003
10. FARE, R., GROSSKOPF, S., LOWEL, C.A.K.: Production Frontiers. Cambridge, Cambridge University Press, 1994
11. FARE, R., GROSSKOPF, S., LOWEL, C.A.K.: The Measurement of Efficiency of Production, Boston, Kluwer-Nijhof, 1985
12. FLEGG, A.T. - ALLEN, D.O. - FIELD, K. - THURLOW, T.W.: Measuring The Efficiency Of British Universities: A Multi-Period Data Envelopment Analysis. Education Economics, 121, 231-249, 2003
13. Tone, K., Sahoo, B.K.: Degree of Scale Economies and Congestion: a Unified DEA Approach, European Journal of Operational Research, 158, s.755-772

#### **KONTAKTNÁ ADRESA**

doc.Ing. Peter Fandel, CSc., Katedra štatistiky a operačného výskumu, Fakulta ekonomiky a manažmentu, Slovenská poľnohospodárska univerzita, [Peter.Fandel@uniag.sk](mailto:Peter.Fandel@uniag.sk)

**Recenzent:** prof. Ing. Zlata Sojková, CSc.