APLIKÁCIA *n*-ROZMERNÝCH INTEGRÁLOV (UKÁŽKY V JAZYKU TURBO PASCAL)

Zoltán Zalabai, SR - Milan Pokorný, SR

Abstrakt

Počítačom podporované vyučovanie matematiky má nezastupiteľné miesto aj vo vyučovaní matematickej analýzy. V článku opisujeme desať úloh na nájdenie ťažiska, pri ktorých je potrebné zistiť približnú hodnotu viacrozmerných integrálov. Nakoľko pri riešení praktických problémov je výpočet presnej hodnoty viacrozmerného integrálu veľmi náročný, je výhodné použiť počítače na nájdenie jeho približnej hodnoty.

Kľúčové slová: viacrozmerný integrál, približné riešenie, ťažisko telesa, súradnice ťažiska, počítačom podporované vyučovanie.

Úvod

Počítačom podporovaná výučba v predmete matematika má svoje nezastupiteľné miesto v sústave vyučovacích metód.

Dnes už existuje celý rad na profesijnej úrovni zostavených programov. Takéto programy využívame aj my. V tomto článku však chceme upriamiť pozornosť na význam tzv. krátkych programov, ktoré môžeme napísať priamo v niektorom programovacom jazyku. Takáto práca veľmi úzko súvisí s priamou výučbou matematiky. Metodiku prípravy takýchto programov bez väčších problémov zvládnu aj žiaci stredných škôl a študenti vysokých škôl. Potom už môžu písať programy samostatne podľa vlastných predstáv.

V článku budeme počítať integrály. V aplikáciách však výpočet jedného integrálu nestačí. Napr. pri výpočte súradníc ťažiska telesa potrebujeme vypočítať štyri trojné integrály! Ide tu vždy o približný výpočet! Uvedieme príklady také, pri ktorých je známy presný výsledok. Zároveň uvedieme aj také úlohy, ktoré klasickými matematickými postupmi nie je možné vyriešiť. Úloha je niekedy prehľadnejšia, ak k nej dokážeme nakresliť vhodný náčrt, či obrázok. Počítač umožňuje takéto obrázky nakresliť. Tým sa zvýši úroveň názornosti pri samotnej výučbe.

Ukážky

Úloha 1.

Vypočítajme súradnice ťažiska rovinného útvaru, ktorý je ohraničený sinusoidou a osou x pre $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

([1], str. 257, pr. 260; výsledok $x_T = \pi / 2$, $y_T = \pi / 8 \doteq 0{,}39269$)

Pre n = 1000 dostaneme takéto približné hodnoty: $x_T = 1{,}5708$, $y_T = 0{,}3927$.

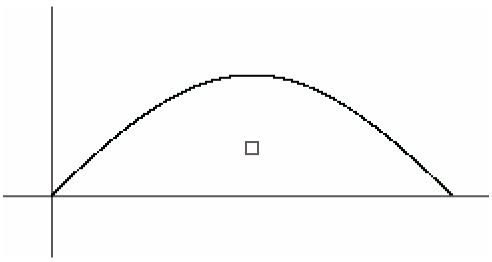
Vypočítali sme tri určité integrály: $S_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx$, $S_y = \int_a^b xydx$, $m = \int_a^b ydx$.

Pre súradnice ťažiska platí: $x_T = \frac{S_y}{m}$, $y_T = \frac{S_x}{m}$.

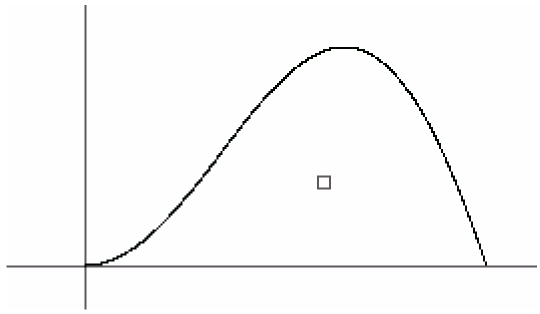
Uvedieme pracovnú verziu programu (Program č. 1) a príslušný obrázok (Obrázok č. 1).

```
uses  Crt, Graph, GenGraph, SclGraph;
var x,s,a,b,h,h1,d,t,xt,yt:Real; n,k,i,k1,k2,k3,w:Integer;
    u: array [1..3] of real;
Function f(x:real):real;
  begin f:=k1*sin(x)+k2*x*sin(x)+k3*0.5*sin(x)*sin(x); end;
begin
  for w:=1 to 3 do
    begin
      write('zadajte k1,k2,k3:'); readln(k1,k2,k3);
      n:=1000; a:=0; b:=3.14159; CLRSCR; s:=0;
      for k:=0 to n-1 do
        begin h:=(b-a)/n; d:=h/2; s:=s+f(a+k*h+d); end;
      u[w]:=s*h; writeln('u[',w,']=',s*h);
      writeln('integral sucet=',s*h:2:5); Readln;
    end;
  xt:=u[2]/u[1]; yt:=u[3]/u[1]; writeln ('xt=',u[2]/u[1]);
  writeln('yt=',u[3]/u[1]); readln;
  initgraphics; scale (-5,4,5,-4); scaleaxis;
  for i:=0 to n do
    begin t:=a+i*h; ScaleputPixel (t,sin(t),15); end;
  readln; h1:=0.05; scaleline (xt-h1,yt-h1,xt+h1,yt-h1);
  scaleline (xt+h1,yt-h1,xt+h1,yt+h1); scaleline (xt+h1,yt+h1,xt-h1,yt+h1);
  scaleline (xt-h1,yt+h1,xt-h1,yt-h1); readln;
end.
```

Program č. 1



Obrázok č. 1



Obrázok č. 2

Úloha 2.

Vypočítajme súradnice ťažiska rovinného útvaru, ktorý je ohraničený grafom funkcie $y = x \cdot \sin x$ a osou *x*, pre $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

Program č. 1 vhodne upravíme.

Pre *n* = 1000 dostaneme takýto výsledok: $x_T = 1{,}868$, $y_T = 0{,}697$. Pozri obrázok č. 2.

Úloha 3.

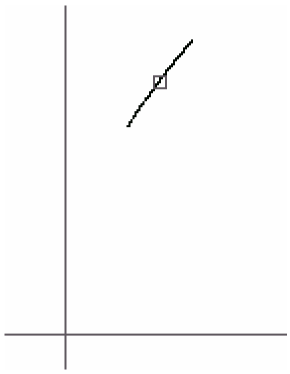
Určme súradnice ťažiska oblúka krivky $y^2 = 12x$, $y \geq 0$, $x \in \langle 1,2 \rangle$.

([1], str. 248, pr. 255, ide o veľmi ťažký príklad, pretože x_T a y_T majú komplikovaný tvar).

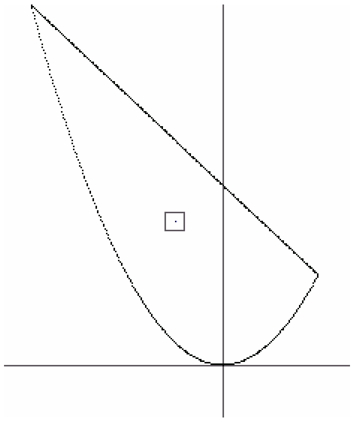
Vypočítame: $S_x = \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$, $S_y = \int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx$, $m = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$.

Súradnice ťažiska sú: $x_T = \dfrac{S_y}{m}$; $y_T = \dfrac{S_x}{m}$.

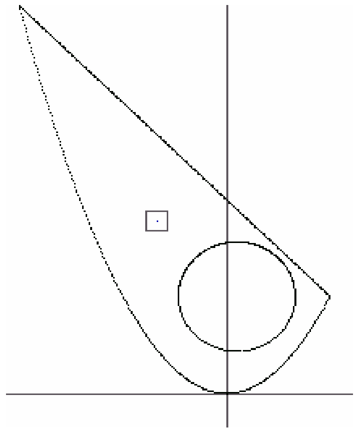
Pre *n* = 1000 dostaneme takýto výsledok: $x_T = 1{,}4807$, $y_T = 4{,}195$. Pozri obrázok č. 3.



Obrázok č. 3



Obrázok č.4



Obrázok č.5

Úloha 4.

Vypočítajme súradnice ťažiska rovinného útvaru, ktorý je ohraničený krivkami $ay = x^2$, $x + y = 2a$ $(a > 0)$.

([2], str. 361, pr. 4052, výsledok: $x_T = -\frac{a}{2}, y_T = \frac{8}{5}a$)

Pre a = 1, n = 300 dostaneme takýto výsledok: $x_T = -0{,}5001$, $y_T = 1{,}601$. Pozri obrázok č. 4.

Úloha 5.

Z oblasti D predošlej úlohy (a = 1) „vyberieme“ kruh: $(x - 0{,}1)^2 + (y - 1)^2 \le \frac{1}{\pi}$. Vznikne nová oblasť: D^*. Vypočítajme súradnice ťažiska oblasti D^*.
Dostaneme takýto výsledok: $x_T = -0{,}671$, $y_T = 1{,}7727$. Pozri obrázok č. 5.

<u>Poznámka:</u> Vypočítali sme tri dvojné integrály $M = \iint_D dxdy$, $M_x = \iint_D ydxdy$, $M_y = \iint_D xdxdy$.

Pre súradnice ťažiska platí: $x_T = \frac{M_y}{M}, y_T = \frac{M_x}{M}$.

Úloha 6.

Rovinný útvar je ohraničený krivkou: $29x^2 + 36y^2 + 24xy + 34x - 48y - 139 = 0$.
Vypočítajme jeho obsah a súradnice ťažiska.

([3], str. 219, elipsa, stred: $S[-1;1]$; $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$).

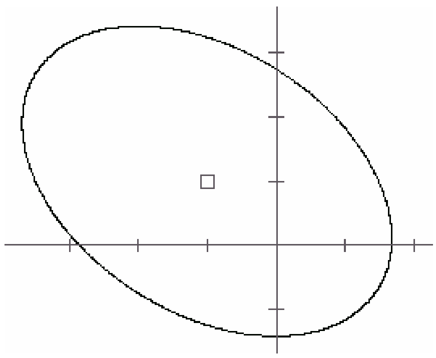
$P = \pi\, a\, b = \pi \cdot 2 \cdot 3 = 18{,}849$; pre n = 300 dostaneme: $P = 18{,}842$; $x_T = -1$, $y_T = 1$.
(Súradnice ťažiska sú súradnicami stredu elipsy). Pozri obrázok č. 6.

Uvedieme časť pracovnej verzie programu pre výpočet trojných integrálov.

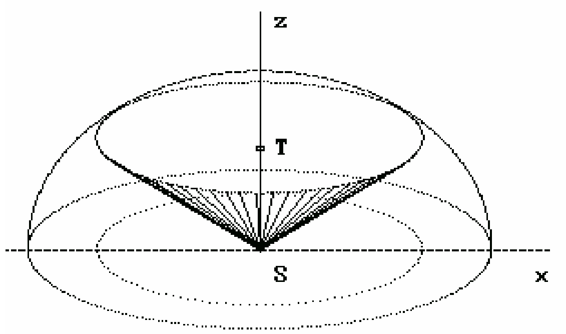
```
uses Crt, Graph, GenGraph, SclGraph;
var k1,k2,k3,k4,w:integer; i,j,k,n:longint; a,b,c,d,e,f,s,h1,h2,h3:real;
x,y,z:array[1..500] of real; u:array[1..4] of real;
function Fx (x,y,z:real):real; begin Fx :=k1+k2*x+k3*y+k4*z; end;
```

```
begin
  for w:=1 to 4 do
    begin
      clrscr; Write ('Zadaj n,k1,k2,k3,k4 = '); ReadLn (n,k1,k2,k3,k4);
      a:=-2; b:=2; c:=-2; d:=2; e:=0; f:=2; writeln('Pracujem'); s:=0;
      for i:=1 to n do
        begin x[i]:= a+i*(b-a)/n; y[i]:= c+i*(d-c)/n;
              z[i]:= e+i*(f-e)/n; end;
      for i:=1 to n do
        for j:=1 to n do
          for k:=1 to n do
            If ((x[i]*x[i]+y[j]*y[j]+z[k]*z[k]-4<=0) and
               (x[i]*x[i]+y[j]*y[j]-z[k]*z[k]<=0))
               then s := s+Fx(x[i],y[j],z[k])*(b-a)*(d-c)*(f-e)/(n*n*n);
      u[w]:=s; WriteLn ('s = ',s); writeln ('u[',w,']=',s); readln;
    end;
  writeln ('xt=',u[2]/u[1]); writeln ('yt=',u[3]/u[1]);
  writeln ('zt=',u[4]/u[1]); readln;
end.
```

Program č. 2



Obrázok č. 6



Obrázok č. 7

Úloha 7.

Vypočítajme súradnice ťažiska telesa, ktoré je ohraničené zhora guľovou plochou, zdola kužeľovou plochou $(z \geq 0)$: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $x^2 + y^2 = z^2$.

Pre $n = 30$ dostaneme takýto výsledok $x_T = y_T = 0$, $z_T = 1{,}280$. Pozri obrázok č. 7.

Bolo potrebné vypočítať 4 trojné integrály :

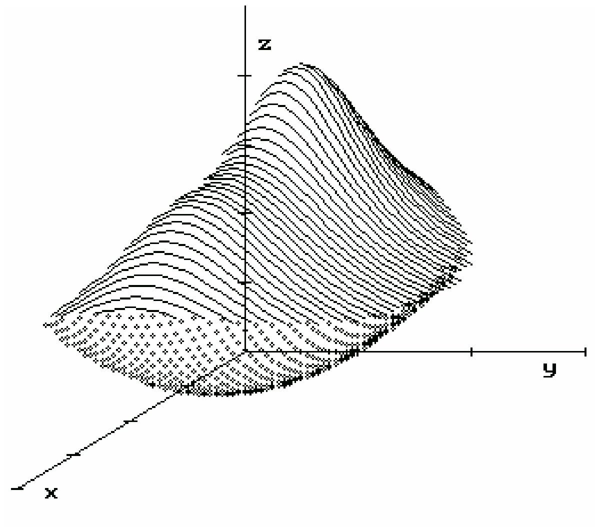
$$m = \iiint_v dxdydz,\ x_T = \frac{1}{m}\iiint_v xdxdydz,\ y_T = \frac{1}{m}\iiint_v ydxdydz,\ z_T = \frac{1}{m}\iiint_v zdxdydz$$

Úloha 8.

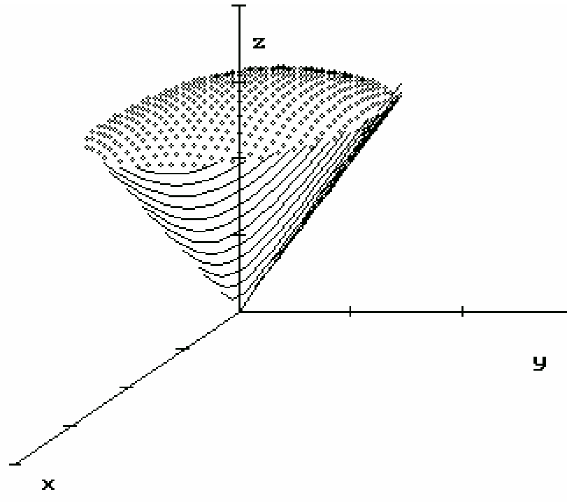
Vypočítajme súradnice ťažiska telesa, ktoré je ohraničené zhora grafom funkcie $h(x, y) = \dfrac{3}{(x+1)^2 + 2y^2 + 1} + \dfrac{2}{(x-1)^2/2 + y^2 + 1}$, zdola grafom funkcie

$g(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} - 0{,}5$.

Výsledok: $x_T = -0{,}08$, $y_T = 0$, $z_T = 1{,}19$ (pre n = 30). Šikmý priemet telesa vidíme na obrázku č. 8.



Obrázok č. 8



Obrázok č. 9

Úloha 9.

Teleso je ohraničené zhora paraboloidom $h(x,y) = -\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} + 3$, zdola kužeľovou plochou $g(x,y) = \sqrt{4x^2 + 4y^2}$. Vypočítajme súradnice ťažiska.

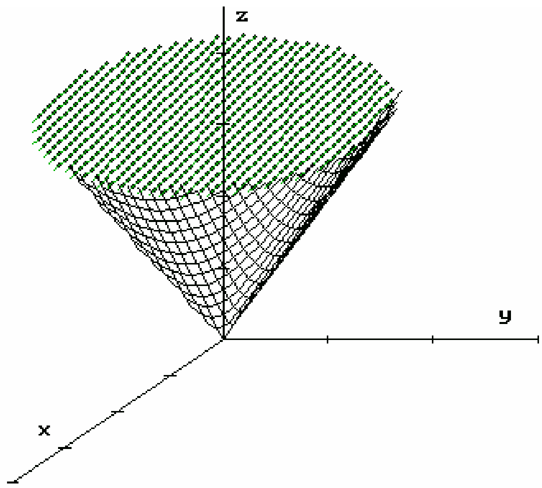
Výsledok: $x_T = 0$, $y_T = 0$, $z_T = 2{,}05$. Šikmý priemet telesa je na obrázku č. 9.

Úloha 10.

Teleso je ohraničené zhora rovinou $h(x,y) = 3 - \frac{x}{5} - \frac{y}{5}$, zdola kužeľovou plochou $g(x,y) = \sqrt{4x^2 + 4y^2}$. Vypočítajme súradnice ťažiska.

Výsledok:

$x_T = -0{,}116$, $y_T = -0{,}116$, $z_T = 2{,}298$. Šikmý priemet telesa je na obrázku č. 10.



Obrázok č. 10

Literatúra

1. Hlaváček, A: Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky I, II. SPN, Praha 1965.
2. Demidovič, B. P.: Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu. Izdateľstvo „Nauka“, Moskva 1969.
3. Bydžovský, B.: Úvod do analytické geometrie. Jednota československých matematiků a fysiků, Prometheus, Praha 1946.
4. Zalabai, Z.: Ukážky využitia produktov KM na výpočet dvojného a trojného integrálu. Zborník vedeckých prác z medzinárodnej konferencie SF TU v Košiciach, STROFEK, Košice 1997.
5. Zalabai, Z. – Pokorný, M.: n-rozmerný integrál – jeho približný výpočet. Acta Mathematica 8, UKF, Nitra 2005, s. 107-112. ISBN 80-8050-896-8

Adresa autorov
prof. RNDr. Zoltán Zalabai, CSc., Trnavská univerzita, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a informatiky, Priemyselná 4, P.O.BOX 9, 918 43 Trnava
E-mail: zzalabai@truni.sk
PaedDr. Milan Pokorný, Trnavská univerzita, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a informatiky, Priemyselná 4, P.O.BOX 9, 918 43 Trnava
E-mail: mpokorny@truni.sk

APPLICATION OF MULTIDIMENSIONAL INTEGRALS

Abstract
Computer supported learning plays an important role in mathematical analysis teaching. The paper deals with ten problems in which it is necessary to find an approximate value of multidimensional integrals to find centre of mass co-ordinates. As it is usually very difficult to calculate exact values of multidimensional integrals, it can be useful to use computers to find approximate values.

Keywords: multidimensional integral, approximate value, centre of a mass, centre of a mass co-ordinates, computer supported learning.

Oponoval: doc. RNDr. Dana Országhová, CSc.