



VYUŽITIE METÓD ŠTATISTICKEJ DYNAMIKY PRI VYHODNOCOVANÍ STOCHASTICKÝCH PROCESOV USE METHODS OF STATISTICAL DYNAMICS AT ANALYSING STOCHASTIC PROCESS

ANDREJ MAGDOLEN – JÁN PRŠAN

Abstract

Software MATHEMATICA 5.0, which is product by Wolfram Research, was used for random numbers generation. The program enables generating sets of random numbers of various statistical properties. For our application we used normal distribution. The set of random numbers had undergone statistical analysis using statistical dynamics methods. We applied low-permeable numeric filter. After filtration, the statistical analysis results showed, that the power spectrum is relatively low. This has been confirmed also by the Fisher test. There are 13 important frequencies total, ranging from an interval of 0,4034Hz – 5,2441Hz. The statistically most significant frequency is 0,4034 Hz. Evaluated and desribed functions with their frequency spectrums can be used as input parameters of rationalizing and optimizing methods of tool's and machinery's design modification. They can be also used as input data of load in adhesive wear testing within tribological experiments.

Key words: statistical dynamics, stochastic process, power spectral density, autocorrelation function

Úvod

Prioritou každého konštruktéra, projektanta alebo vedca, ktorý sa podieľa na vývoji poľnohospodárskych strojov, je vytvoriť taký konštrukčný návrh stroja (model), ktorý by sa mal čo najviac približovať ku skutočnému stroju, aký bude pracovať v reálnych prevádzkových podmienkach. A je jedno, či ide o traktor, kombajn, pluh, alebo dojaciu linku... Preto pri konštrukcii všetkých poľnohospodárskych strojov nie je možné zanedbávať meranie a zisťovanie rôznych prevádzkových procesov. Tieto procesy nám dávajú potrebnú vstupnú informáciu o budiacich účinkoch prostredia v ktorom bude daný stroj pracovať.

Ale keďže v dnešnej dobe sú takmer všetky poľnohospodárske stroje vystavené dynamickým silovým účinkom, ktoré majú prevažne náhodný charakter, bolo potrebné zavedenie štatistických metód do vyhodnocovania nameraných veličín. Potom je možné získať dostatočne presné informácie, ktoré odhaľujú skryté vzťahy medzi jednotlivými veličinami, alebo stavmi skúmaného systému. Preto ak chceme, aby daný stroj pracoval s čo najvyšším výkonom, bezpečnosťou a prevádzkovou spoľahlivosťou, pri čo najnižších nákladoch na prevádzku, a zároveň aby dochádzalo k čo najnižšiemu poškodeniu životného prostredia, musíme výsledky štatistickej dynamiky zahŕňať do moderných výpočtových a konštrukčných postupov.

Pre úspešné zvládnutie metód štatistickej dynamiky je nutné si uvedomiť, že stochastické (náhodné) procesy sú vo svojej podstate zložitejšie ako procesy deterministické (nenáhodné). A aj

Kontaktná adresa:

Andrej Magdolen, doc. Ing. Ján Pršan, CSc. , Slovenská poľnohospodárska univerzita v Nitre, Mechanizačná fakulta, Katedra mechaniky a trojnícva, Tr. A. Hlinku č. 2, 949 76 Nitra



časové intervaly sledovania týchto procesov sú spravidla pomerne dlhé, preto je treba vytvoriť taký merací, organizačný a technický systém, ktorý v sebe bude zahrňovať aj zodpovedajúce experimentálne zariadenie na ich spoľahlivé a presné snímanie, a vyhodnotenie výsledkov.

Okrem toho dôležitú úlohu hrajú aj vlastné podmienky, za ktorých sa prevádzkové náhodné procesy snímajú a majú rozhodujúci vplyv na kvalitu vyhodnotených výsledkov. Závažnosť určenia prevádzkových podmienok je najmä v tom, že sú zdrojom prevádzkových procesov, reprezentujúcich silové účinky, deformácie, zrýchlenia, tlaky a pod..., teda prevádzkové charakteristiky, z veľkej časti určujúce prevádzkové vlastnosti a spoľahlivosť konštrukcií. Preto je potrebné náhodným procesom venovať oveľa väčšiu pozornosť ako procesom deterministickým.

Materiál a metódy

Meranie a záznam stochastických prevádzkových procesov

Pre meranie náhodných procesov je nutné vytvoriť tzv. meracie reťazce, ktorých zložitosť je ovplyvnená výberom meracích podmienok. Za najbežnejší (pre pohybujúci sa objekt) možno považovať merací reťazec v nasledovnom zložení:

snímač – merací prevod – nastavovač úrovni – analógový záznamník (merací magnetofón)

Merací magnetofón (alebo iné záznamové médium) sa používa s toho dôvodu, lebo analýza procesu sa neuskutočňuje v reálnom čase (pre komplikovanosť meracej aparatury) ale uskutočňuje sa na stacionárnom pracovisku (napr. v laboratóriu) na počítači.

Pre ďalšie spracovanie prevádzkového procesu je treba zaznamenaný proces previesť do digitálnej formy, čiže daný proces navzorkovať. Vzorkovanie (diskretizácia) procesu sa uskutočňuje pomocou A/Č (A/D) prevodníka pomocou ktorého získame z analógového záznamu (spojitá funkcia) časovú postupnosť čísel s náhodným charakterom, ktoré nám popisujú daný proces. Vzorkovanie spočíva v odčítavaní poradníc daného procesu v ekvidistantných intervaloch Δt . Z uvedeného vyplýva ďalší reťazec:

merací magnetofón – A/Č (A/D) prevodník – počítač

Vzorkovanie je periodické s frekvenciou $f_{vz} = 1/\Delta t$ a treba mu venovať náležitú pozornosť, pretože je potrebné správne zvoliť interval vzorkovania Δt , ktorý musí byť v súlade s maximálnou frekvenciou f_{max} obsiahnutou v danom procese (tato frekvencia musí byť vopred známa, aspoň odhadom). Minimálnu vzorkovaciu frekvenciu volíme podľa tzv. Shanonovho-Kotelnikovho kritéria:

$$f_{vz} = \frac{1}{\Delta t} = 2f_{max} \quad (1)$$

Pre praktické aplikácie sa ukázalo vhodné voliť minimálnu vzorkovaciu frekvenciu v rozsahu:

$$f_{vz} = (2,5 \text{ až } 3,0) f_{max} \quad (2)$$

Simulácia stochastických procesov

Ako základ všetkých metód simulácií náhodných procesov v laboratórnych podmienkach je generovanie náhodných čísel so zadanými štatistickými vlastnosťami na počítači. V súčasnosti je možno generovanie náhodných čísel pomocou počítača riešiť veľmi rýchlo a jednoducho pomocou viacerých softwarových produktov. Najčastejšie sa používajú programy ako: MATLAB[®] od firmy Math Works, MATHEMATICA[®] od Wolfram Research alebo MATHCAD[®] od Math Soft.



My sme v našej aplikácii použili generovanie náhodných čísel v programovom systéme MATHEMATICA 5.0. Do programu sme zadali nasledovné parametre (štatistické vlastnosti stochastického procesu):

- a) teoretické rozdelenie – normálne (Gaussovo)
- b) počet náhodných čísel – $N = 2500$
- c) štandardná smerodajná odchýlka – $\sigma_x = 1$
- d) stredná hodnota – $\mu_x = 0$

Popisné charakteristiky v rámci korelačnej teórie

Po vygenerovaní potrebného počtu náhodných čísel (realizácie stochastického procesu) sme na tieto uplatnili metódy štatistickej dynamiky v rámci korelačnej teórie. Nasledovne boli pomocou programov určené nasledovné charakteristiky:

- a) základné štatistické parametre (stredná hodnota závislá na čase, rozptyl, štandardná smerodajná odchýlka)
- b) určenie stacionárnosti daného procesu
- c) výpočet autokorelačnej funkcie
- d) výpočet výkonovej spektrálnej hustoty
- e) výpočet periodogramu
- f) aplikácia Fisherovho testu pre zistenie významnosti frekvencií obsiahnutých v skúmanom náhodnom procese

Stredná hodnota závislá na čase:

$$m_{(t_i)} = \frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^{N_i} x_{(i\Delta t)} \quad (3)$$

kde: $N_i = N/I$ – je dĺžka zvoleného intervalu

N – počet hodnôt x v realizácii

I – je počet hodnôt zvoleného intervalu

Centrované veličiny procesu:

$$x_{(i\Delta t)}^{\circ} = x_{(i\Delta t)} - m_{(t_i)} \quad (4)$$

Rozptyl:

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_{(i\Delta t)} - \bar{x})^2 \quad (5)$$

Štandardná smerodajná odchýlka:

$$\sigma_x = \sqrt{s^2} \quad (6)$$

Po výpočte základných štatistických charakteristík sme určili stacionárnosť náhodného procesu a to nasledovným spôsobom:

- najprv sme si náhodný proces rozdelili na rovnaké množstvo úsekov a počítali sme ich stredné hodnoty a rozptyly
- nasledovne sme pre získanie postupnosti stredných hodnôt a rozptylov aplikovali test trendu a test iterácií



- nakoniec sa posúdila štatistická významnosť rozdielov stredných hodnôt a rozptylov (pre zadanú hladinu významnosti $P = 5\%$)

Autokorelačná funkcia:

$$R_{xx(r)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-r} x_{(i\Delta t)}^{\circ} x_{((i+r)\Delta t)}^{\circ} \quad (7)$$

kde: $r = 0, 1, \dots$ až m

Spektrálna výkonová hustota:

Spektrálnu výkonovú hustotu získame na základe Wienerovho-Chinčinovho vzťahu (čiže Fourierovou transformáciou autokorelačnej funkcie):

$$S(f) = 4 \int_0^{\infty} R_{xx(\tau)} \cos 2\pi f \tau d\tau \quad (8)$$

Po úprave a uvážení vzorca (1) získavame vzťah, ktorý je ľahko použiteľný v počítačovom algoritme:

$$S^0 = \frac{1}{f_{\max}} \left[R_{xx(0)} + 2 \sum_{r=1}^{m-1} R_{xx(r\Delta t)} \cos \left(\frac{\pi r f}{f_{\max}} \right) + R_{xx(m\Delta t)} \cos \left(\frac{\pi m f}{f_{\max}} \right) \right] \quad (9)$$

Predchádzajúce deterministické charakteristiky boli nasledovne vizuálne spracované vo forme grafov (viď príloha).

Štatistickú významnosť zistených frekvencií bola určená Fisherovým testom. Tento aplikujeme na základný bod štatistickej analýzy – periodogram., ktorý je daný svojou funkciou:

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi N} \left| \sum_{i=1}^N x_i e^{-j i \lambda} \right|^2, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi \quad (10)$$

Po úprave dostávame:

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left[C_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} C_k \cos(k\lambda) \right] \quad (11)$$

kde:

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} x_t x_{t+k}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (12)$$

Výsledky a diskusia

Najprv sme danú realizáciu náhodného procesu nasimulovali (generovali náhodné čísla v programovom systéme MATHEMATICA 5.0). A vzápätí sme na ňu aplikovali metódy štatistickej dynamiky v rámci korelačnej teórie náhodných procesov.

Z nasimulovanej realizácie náhodného procesu (časový priebeh viď. Obr. 1) sme zistili, že ide o stacionárny náhodný proces (pomocou testov trendu a iterácií). Je stacionárny v strednej



hodnote ako aj v rozptyle. Čo potvrdzuje aj histogram rozdelenia početnosti (Obr. 3). Priebeh autokorelačnej funkcie je znázornený na Obr. 4

Frekvenčná analýza tejto realizácie náhodného procesu je daná svojou spektrálnou výkonovou hustotou (Obr. 5) s ktorou je korešpondujúci aj periodogram (Obr. 6). Po aplikácii Fisherovho testu sme zistili, že výkonovom spektre sa nachádza celkovo 13 štatisticky významných frekvencií, ktoré sa pohybujú v intervale 0,4034 po 5,2441Hz. Pričom najvýznamnejšia z nich je frekvencia s hodnotou 0,4034Hz (vid'. Tab. 1)

Tabuľka 1 – Fisherov test (nasimulované údaje)

j	$\lambda(j)$	$T(j)$	$I(\lambda_j) \times 10^6$	W	W_{krit}	Frekvencia, Hz	Poradie
4	0,01014	619,750	2360052,25	0,0384	0,0095	0,4034	1
19	0,04816	130,474	1165045,13	0,0197	0,0095	1,9161	2
52	0,13180	47,673	1153048,38	0,0199	0,0095	5,2441	3
26	0,06590	95,346	956828,56	0,0168	0,0095	2,6220	4
25	0,06336	99,160	816770,44	0,0146	0,0095	2,5212	5
28	0,07097	88,536	726770,50	0,0132	0,0095	2,8237	6
17	0,04309	145,824	703833,38	0,0130	0,0095	1,7144	7
12	0,03041	206,583	697938,81	0,0130	0,0095	1,2102	8
7	0,01774	354,143	694060,88	0,0131	0,0095	0,7059	9
46	0,11659	53,891	621550,13	0,0119	0,0095	4,6390	10
37	0,09378	67,000	619950,94	0,0120	0,0095	3,7313	11
15	0,03802	165,267	618302,69	0,0121	0,0095	1,5127	12
11	0,02788	225,364	52,725038	0,0105	0,0095	1,1093	13

Záver

V predložennom príspevku je realizovaná simulácia náhodného procesu, výpočet hlavných charakteristík v rámci korelačnej teórie stochastických procesov a aplikácia Fischerovho testu na zistenie štatistickej významnosti najvyšších hodnôt periodogramu, čím sme zistili signifikantnú periodicitu určitej frekvencie (najvyššej), ako aj štatistickú významnosť ďalších frekvencií (vyšších harmonických kmitov). Získané informácie môžeme využiť ďalej pri životnostných aplikáciách, posúdení dynamických vlastností a odhad spoľahlivosti pri typickom prevádzkovom zaťažení.

Použitá literatúra

1. ANDĚL, J. 1976. *Statistická analýza časových řad*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1976, 253 s.
2. BENDAT, J.S. – PIERSOL, A.G. 1980. *Engineering applications of correlation and spectral Analysis*. New York, 1980
3. ČAČKO, J. – BÍLÝ, M. – BUKOVECZKÝ, J. 1984. *Meranie, vyhodnocovanie a simulácia prevádzkových náhodných procesov*. Bratislava: Veda, 1984. 210 s.
4. MATYÁŠ, V. 1976. *Měření, analýza a vytváření náhodných procesů*. Praha: SNTL, 1976. 160 s.
5. RYDLO, P. – VANEČEK, A. 1980. *Vyhodnocování dynamických měření*. Praha: NADAS, 1980. 272 s.
6. WOLFRAM, S. 2003. *The Mathematica Book, 5th ed.* Cambridge: Wolfram Media, 2003. 1464 s. ISBN 1-57955-022-3.



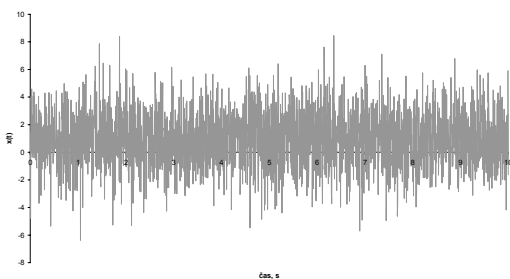
Súhrn

Software MATHEMATICA 5, ktorý je produktom firmy Wolfram Research, sme požíli pre generovanie náhodných čísel. Program umožňuje generovať súbory náhodných čísel s rôznymi štatistickými vlastnosťami. Pre našu aplikáciu sme použili normálne rozdelenie. Súbory náhodných čísel sme podrobili štatistickej analýze s použitím štatistických dynamických metód. Aplikovali sme nízko-priepustný číslicový filter. Po filtrácii, štatistická analýza ukázala, že silové spektrum je relatívne nízke. Toto bolo tiež potvrdené Fisherovým testom. Je tu 13 významných frekvencií, rozmedzí z intervalov 0,4034Hz – 5,2441Hz. Štatisticky najdôležitejšia frekvencia je 0,4034Hz. Vyčíslením a určením funkcií ktorých frekvenčné spektrá môžu byť použité ako vstupné parametre pri racionalizácii a optimalizácii metód úpravy strojárskych návrhov. Tiež môžu byť použité ako vstupné data pre testovanie adhezívneho opotrebenia počas tribologických experimentov.

Kľúčové slová: štatistická dynamika, stochastický proces, autokorelačná funkcia, výkonová spektrálna hustota

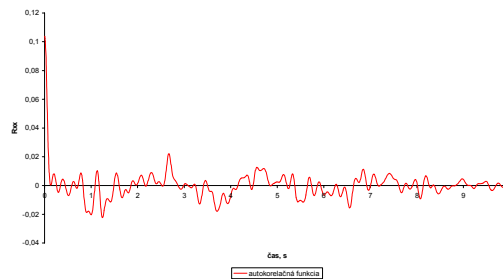
Príloha

Časový priebeh vygenerovaného súboru čísel



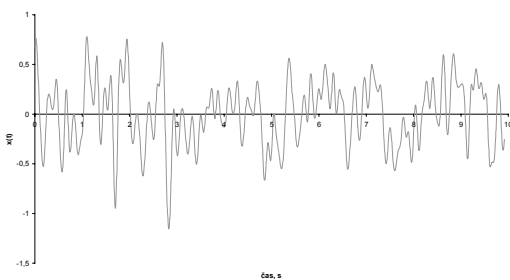
Obrázok 1

Autokorelačná funkcia



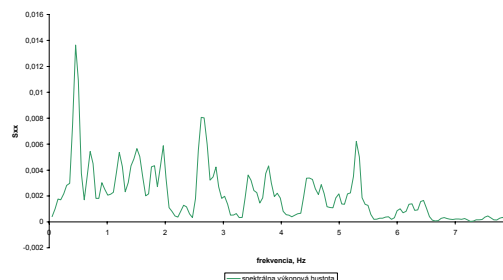
Obrázok 4

Časový priebeh vyfiltrovaného a vyhladeného súboru



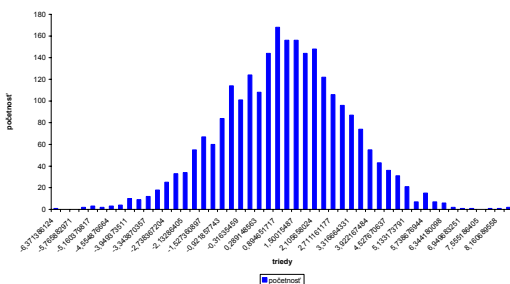
Obrázok 2

Spektrálna výkonová hustota



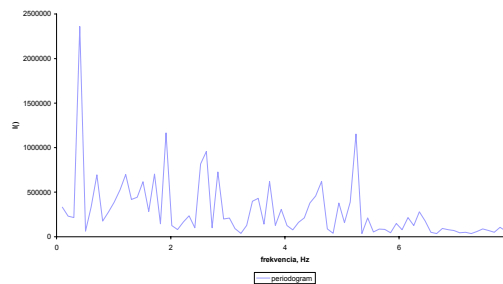
Obrázok 5

Histogram



Obrázok 3

Periodogram



Obrázok 6