VYUŽITIE METÓDY NEURČITÝCH KOEFICIENTOV PRI INTEGROVANÍ NIEKTORÝCH TYPOV FUNKCIÍ

Norbert Kecskés, SR

Abstrakt

V príspevku sa zaoberáme niektorými špeciálnymi triedami funkcií, ku ktorým je možné nájsť primitívne funkcie pomocou derivácie. Konkrétny tvar hľadanej primitívnej funkcie potom určujeme použitím metódy neurčitých koeficientov.

Kľúčové slová

primitívna funkcia, integrál, derivácia, metóda neurčitých koeficientov

Úvod

Výpočet neurčitého integrálu, teda primitívnej funkcie k danej funkcii patrí medzi základné operácie vyššej matematiky. Ide o to, že ak máme danú nejakú spojitú funkciu $f(x)$ na intervale (a,b), potom hľadáme takú funkciu $F(x)$, ktorej derivácia sa rovná danej funkcii na intervale (a,b), čiže platí $F'(x)=f(x)$. Je potrebné poznamenať, že výpočet primitívnej funkcie, teda integrovanie, je vo všeobecnosti zložitejšie a náročnejšie ako derivovanie. Je to spôsobené tým, že pre integrovanie neexistujú všeobecné pravidlá podobné tým, ktoré platia pre derivovanie.

Materiál a metódy

V niektorých prípadoch, ak vieme odhadnúť tvar hľadanej primitívnej funkcie, môžeme integrovanie obísť. Týka sa to najmä takých funkcií, ktoré sa derivovaním kvalitatívne nemenia. Medzi takéto funkcie patria napríklad polynómy, ďalej exponenciálne funkcie e^{kx}, a^{kx} a goniometrické funkcie $\sin(kx)$ a $\cos(kx)$.

Výsledky a diskusia

V ďalšom sa zameriame na niektoré typy funkcií, ku ktorým je možné nájsť primitívne funkcie pomocou derivácie s využitím metódy neurčitých koeficientov (MNK).

1. Integrály typu $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$,

kde $P_n(x)$, resp. $Q_m(x)$ označujú polynómy stupňa *n*, resp. *m*. Ak výraz $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ predstavuje rýdzo lomenú racionálnu funkciu ($n < m$) a menovateľ je rozložený na súčin koreňových činiteľov v **R,** môžeme výraz $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ rozložiť na súčet parciálnych zlomkov, ktoré potom integrujeme. Koeficienty prislúchajúce jednotlivým parciálnym zlomkov nájdeme pomocou MNK. Keďže táto metóda je všeobecne známa, nebudeme sa ňou zaoberať.

2. Integrály typu $\int P_n(x)\cdot \sin kx\,dx$, $\int P_n(x)\cdot \cos kx\,dx$, $\int P_n(x)\cdot e^{kx}\,dx$, $\int P_n(x)\cdot a^{kx}\,dx$,

kde $P_n(x)$ je opäť polynóm stupňa *n*.

Lema 1. *Nech* $P_n(x)$ *je polynóm stupňa n, potom primitívna funkcia k funkcii* $P_n(x)\cdot\sin kx$ *má tvar* $Q_n(x)\cdot\cos kx + R_{n-1}(x)\cdot\sin kx$, *kde* $Q_n(x)$, *resp.* $R_{n-1}(x)$ *sú vhodné polynómy stupňa n, resp. n-1, čiže platí*

$$\int P_n(x)\cdot\sin kx\,dx = Q_n(x)\cdot\cos kx + R_{n-1}(x)\cdot\sin kx + c.$$

Dôkaz. Kvôli lepšej prehľadnosti polynómy stupňa *n–k* budeme označovať jednoducho P_{n-k} a príslušné derivácie znížením stupňa príslušného polynómu, t.j. $P_n' = P_{n-1}$, $P_n'' = P_{n-1}' = P_{n-2}$ a pod.
Uvažujme funkciu $P_n\cdot\cos kx$, potom zrejme platí

$$\left(P_n\cdot\cos kx\right)' = P_{n-1}\cdot\cos kx - k\cdot P_n\cdot\sin kx \tag{1}$$

$$P_n\cdot\cos kx = \int P_{n-1}\cdot\cos kx\,dx - \int k\cdot P_n\cdot\sin kx\,dx \tag{2}$$

$$\int k\cdot P_n\cdot\sin kx\,dx = -P_n\cdot\cos kx + \int P_{n-1}\cdot\cos kx\,dx \tag{3}$$

Vezmime teraz funkciu $P_{n-1}\cdot\sin kx$ a zopakujme kroky (1), (2) a (3)

$$\left(P_{n-1}\cdot\sin kx\right)' = P_{n-2}\cdot\sin kx + k\cdot P_{n-1}\cdot\cos kx$$

$$P_{n-1}\cdot\sin kx = \int P_{n-2}\cdot\sin kx\,dx + \int k\cdot P_{n-1}\cdot\cos kx\,dx$$

$$k\int P_{n-1}\cdot\cos kx\,dx = P_{n-1}\cdot\sin kx - \int P_{n-2}\cdot\sin kx\,dx \tag{4}$$

Dosadením (4) do (3) dostávame

$$\int k\cdot P_n\cdot\sin kx\,dx = -P_n\cdot\cos kx + \frac{1}{k}\left(P_{n-1}\cdot\sin kx - \int P_{n-2}\cdot\sin kx\,dx\right) \tag{5}$$

Vezmime ešte funkciu $P_{n-2}\cdot\cos kx$ a opäť zopakujme kroky (1), (2) a (3)

$$\left(P_{n-2}\cdot\cos kx\right)' = P_{n-3}\cdot\cos kx - k\cdot P_{n-2}\cdot\sin kx$$

$$P_{n-2}\cdot\cos kx = \int P_{n-3}\cdot\cos kx\,dx - \int k\cdot P_{n-2}\cdot\sin kx\,dx$$

$$k\cdot\int P_{n-2}\cdot\sin kx\,dx = -P_{n-2}\cdot\cos kx + \int P_{n-3}\cdot\cos kx\,dx \tag{6}$$

Dosaďme teraz (6) do (5), dostávame

$$\int k \cdot P_n \cdot \sin kx \, dx = -P_n \cdot \cos kx + \frac{1}{k}\left(P_{n-1} \cdot \sin kx - \frac{1}{k}\left(-P_{n-2} \cdot \cos kx + \int P_{n-3} \cdot \cos kx \, dx \right)\right) \tag{7}$$

Vzťah (7) možno zrejme jednoduchšie písať v tvare

$$\int P_n \cdot \sin kx \, dx = \left(T_n + T_{n-2}\right) \cdot \cos kx + S_{n-1} \cdot \sin kx + \int S_{n-3} \cdot \cos kx \, dx,$$

Kde T_{n-k}, S_{n-k} sú vhodné polynómy daného stupňa. Ďalším použitím krokov (1), (2) a (3) možno vyjadriť $\int S_{n-3} \cdot \cos kx \, dx = S_{n-3} \cdot \sin kx - \int S_{n-4} \cdot \sin kx \, dx$, celkove teda

$$\int P_n \cdot \sin kx \, dx = \left(T_n + T_{n-2}\right) \cdot \cos kx + \left(S_{n-1} + S_{n-3}\right) \cdot \sin kx + \int S_{n-4} \cdot \sin kx \, dx \tag{8}$$

Zrejme po n krokoch sa integrál na pravej strane (8) zredukuje na konštantu. Môžeme teda písať

$$\int P_n \cdot \sin kx \, dx = \left(\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} T_{n-2k} \right) \cdot \cos kx + \left(\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} S_{n-(2k+1)} \right) \cdot \sin kx + c$$, alebo jednoduchšie

$$\int P_n(x) \cdot \sin kx \, dx = Q_n(x) \cdot \cos kx + R_{n-1}(x) \cdot \sin kx + c. \square$$

Uvedieme teraz ilustračný príklad.

Príklad 1. Vypočítajme $\int \left(2x^3 - 4x^2 + x - 2\right) \cdot \sin 3x \, dx$.

Riešenie. Na základe Lemy 1 možno písať

$$\int \left(2x^3 - 4x^2 + x - 2\right) \cdot \sin 3x \, dx = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) \cdot \cos 3x + \left(Ex^2 + Fx + G\right) \cdot \sin 3x,$$

po derivácii máme

$$\left(2x^3 - 4x^2 + x - 2\right) \cdot \sin 3x = \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) \cdot \cos 3x - 3\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) \cdot \sin 3x +$$

$$+ \left(2Ex + F\right) \cdot \sin 3x + 3\left(Ex^2 + Fx + G\right) \cdot \cos 3x.$$

Ďalej roznásobením a použitím MNK dostávame sústavu

$$\begin{array}{ll} 3A + 3E = 0 & -3A = 2 \\ 2B + 3F = 0 & -3B = -4 \\ C + 3G = 0 & -3C + 2E = 1 \\ & -3D + F = -2 \end{array}$$

Riešením tejto sústavy sú čísla $A=-\frac{2}{3}, B=\frac{4}{3}, C=\frac{1}{9}, D=\frac{10}{27}, E=\frac{2}{3}, F=-\frac{8}{9}, G=-\frac{1}{27}$.
Celkove teda platí (po úprave)

$$\int \left(2x^3-4x^2+x-2\right)\cdot \sin 3x \, dx =$$

$$=\frac{1}{27}\left[\left(-18x^3+36x^2+3x+10\right)\cdot \cos 3x+\left(18x^2-24x-1\right)\cdot \sin 3x\right]+c$$

Lema 2. *Nech $P_n(x)$ je polynóm stupňa n, potom primitívna funkcia k funkcii $P_n(x)\cdot \cos kx$ má tvar $Q_n(x)\cdot \sin kx + R_{n-1}(x)\cdot \cos kx$, kde $Q_n(x)$, resp. $R_{n-1}(x)$ sú vhodné polynómy stupňa n, resp. n-1, čiže platí*

$$\int P_n(x)\cdot \cos kx \, dx = Q_n(x)\cdot \sin kx + R_{n-1}(x)\cdot \cos kx + c.$$

Lema 3. *Nech $P_n(x)$ je polynóm stupňa n, potom primitívna funkcia k funkcii $P_n(x)\cdot e^{kx}$, resp. $P_n(x)\cdot a^{kx}$ má tvar $Q_n(x)\cdot e^{kx}$, resp. $Q_n(x)\cdot a^{kx}$ kde $Q_n(x)$ je vhodný polynóm stupňa n, čiže platí*

$$\int P_n(x)\cdot e^{kx}\, dx = Q_n(x)\cdot e^{kx}+c,\ \ resp.\ \int P_n(x)\cdot a^{kx}\, dx = Q_n(x)\cdot a^{kx}+c.$$

Dôkazy Lemy 2 a Lemy 3 sú analogické ako pri Leme1, preto ich neuvádzame.

Príklad 2. Vypočítajme $\int \left(2x^2-1\right)\cdot e^{2x}\, dx$.

Riešenie. Pre daný integrál platí

$$\int \left(2x^2-1\right)\cdot e^{2x}\, dx = \left(Ax^2+Bx+C\right)\cdot e^{2x}$$

$$\left(2x^2-1\right)\cdot e^{2x}\, dx = (2Ax+B)\cdot e^{2x}+2\left(Ax^2+Bx+C\right)\cdot e^{2x}$$

Použitím MNK dostávame sústavu

$$\begin{aligned}2A&=2\\2A+2B&=0\\B+2C&=-1\end{aligned}$$

$$\int \left(2x^2-1\right)\cdot e^{2x}\, dx = \left(x^2-x\right)\cdot e^{2x}+c$$

Poznamenajme, že integrály tejto triedy sa štandardne riešia metódou per partes. Nakoniec princíp tejto metódy bol použitý aj pri dôkaze Lemy 1. V konkrétnych príkladoch stojí za uváženie ktorú metódu zvoliť, avšak pri polynómoch vyšších stupňov sa ukazuje vyššie uvedená metóda efektívnejšia.

3. Integrály typu $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{Q_m(x)}}\,dx$, kde $P_n(x)$, resp. $Q_m(x)$ sú polynómy stupňa *n*, resp. *m*, pričom platí $m \geq 2 \ \wedge \ n \geq m-1$.

Lema 4. *Nech* $P_n(x), Q_m(x)$ *sú polynómy stupňa n, resp. m, potom primitívna funkcia k funkcii* $\frac{P_n(x)}{\sqrt{Q_m(x)}}$ *má tvar* $R_{n-m+1}(x)\cdot\sqrt{Q_m(x)} + \int \frac{S_{m-2}(x)}{\sqrt{Q_m(x)}}\,dx$, *kde* $R_{n-m+1}(x), S_{m-2}(x)$ *sú vhodné polynómy stupňa n-m+1, resp. m-2, čiže platí*

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{Q_m(x)}}\,dx = R_{n-m+1}(x)\cdot\sqrt{Q_m(x)} + \int \frac{S_{m-2}(x)}{\sqrt{Q_m(x)}}\,dx\,.$$

Dôkaz. Myšlienka dôkazu je analogická ako pri Leme 1.
Vezmime funkciu $A_n(x)\cdot\sqrt{Q_m(x)}$, potom

$$\left[A_n\sqrt{Q_m}\right]' = A_{n-1}\cdot\sqrt{Q_m} + A_n\cdot\frac{Q_{m-1}}{2\sqrt{Q_m}}$$

$$A_n\sqrt{Q_m} = \int A_{n-1}\cdot\sqrt{Q_m}\,dx + \int A_n\cdot\frac{Q_{m-1}}{2\sqrt{Q_m}}\,dx\,, \tag{9}$$

analogicky pre $A_{n-1}(x)\cdot\sqrt{Q_m(x)}$ platí

$$A_{n-1}\sqrt{Q_m} = \int A_{n-2}\cdot\sqrt{Q_m}\,dx + \int A_{n-1}\cdot\frac{Q_{m-1}}{2\sqrt{Q_m}}\,dx \tag{10}$$

a ďalej

$$A_{n-2}\sqrt{Q_m} = \int A_{n-3}\cdot\sqrt{Q_m}\,dx + \int A_{n-2}\cdot\frac{Q_{m-1}}{2\sqrt{Q_m}}\,dx \tag{11}$$

Sčítaním (9), (10), (11) dostávame

$$(A_n + A_{n-1} + A_{n-2})\sqrt{Q_m} = \int (A_{n-1} + A_{n-2} + A_{n-3})\cdot\sqrt{Q_m}\,dx + \int (A_n + A_{n-1} + A_{n-2})\cdot\frac{Q_{m-1}}{2\sqrt{Q_m}}\,dx\,.$$

Zrejme po *n*- tom kroku by sme dostali

$$\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}\sqrt{Q_m} = \int \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}\cdot\sqrt{Q_m}\,dx + \int \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}\cdot\frac{Q_{m-1}}{2\sqrt{Q_m}}\,dx\,,$$

čo môžeme jednoduchšie písať ako

$$R_n\sqrt{Q_m} = \int S_{n-1}\cdot\sqrt{Q_m}\ dx + \int R_n\cdot\frac{Q_{m-1}}{2\sqrt{Q_m}}\ dx$$

$$R_n\sqrt{Q_m} = \int S_{n-1}\cdot\frac{Q_m}{\sqrt{Q_m}}\ dx + \int R_n\cdot\frac{Q_{m-1}}{2\sqrt{Q_m}}\ dx$$

$R_n\sqrt{Q_m} = \int \frac{SQ_{m+n-1}}{\sqrt{Q_m}}\ dx + \int \frac{RQ_{n+m-1}}{\sqrt{Q_m}}\ dx$, z čoho potom

$\int \frac{SQ_{m+n-1}}{\sqrt{Q_m}}\ dx = R_n\sqrt{Q_m} + \int \frac{S_{m-2}}{\sqrt{Q_m}}\ dx$, kde RQ sme označili ako S.

Po prečíslovaní indexov a novom označení polynómov môžeme nakoniec písať

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{Q_m(x)}}\ dx = R_{n-m+1}(x)\cdot\sqrt{Q_m(x)} + \int \frac{S_{m-2}(x)}{\sqrt{Q_m(x)}}\ dx.\ \square$$

Tvrdenie Lemy 4 odhaľuje „štruktúru“ primitívnej funkcie k funkcii $\frac{P_n(x)}{\sqrt{Q_m(x)}}$. Zrejme z praktického hľadiska toto tvrdenie bude mať význam najmä pre $m=2$, teda pre integrály typu $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ dx$. Pre $m>2$ predstavuje $\int \frac{S_{m-2}(x)}{\sqrt{Q_m(x)}}\ dx$ väčšinou transcendentný integrál, ktorý nie je riešiteľný elementárnymi metódami.

Poznámka. Pre integrál $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ dx$ zrejme platí

$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ dx = R_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{k}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\ dx$, kde posledný integrál

riešime vhodnou Eulerovou alebo goniometrickou substitúciou.

Záver

V príspevku sme poukázali na využitie metódy neurčitých koeficientov pri integrovaní niektorých špeciálnych typov funkcií. Uviedli sme najčastejšie sa vyskytujúce typy funkcií, ktoré možno integrovať týmto spôsobom. Poznamenajme, že existujú aj ďalšie typy funkcií, kde je možné s výhodou použiť metódu MNK.

Adresa

Mgr. Norbert Kecskés
KM FEM SPU
Tr. A. Hlinku 2, Nitra
nk@fem.uniag.sk

METHOD OF UNDETERMINED COEFFICIENTS AND ITS USE AT INTEGRATION OF SPECIAL TYPES OF FUNCTIONS

Abstract

The paper presents special families of functions whose antiderivatives may be found by differentiation. The concrete form of the antiderivative is found by means of undetermined coefficients.

Key words

method of undetermined coefficients, differentiation, antiderivative, indefinite integral

Oponoval: Ing. Pavel Fľak, DrSc.