VÝPOČET CENY TOVARU POMOCOU DIFERENČNEJ ROVNICE

Arnold Dávid, SR – František Peller, SR

Abstrakt. V článku sa určuje cena tovaru pri rôznych kritériach jej určenia. Používajú sa diferenčné rovnice prvého a druhého rádu. Excelovské aplikácie umožňujú riešiť takúto úlohu aj bez používania zložitých vzorcov.

Kľúčové slová: pavučinový model, diferenčné rovnice, cena tovaru, Excel.

Úvod

Analýza stability trhu sa často nepresne formuluje takto:

- ak sa cena stanoví príliš nizko, tak dopyt prevýší ponuku a cena stúpa k rovnovážnemu stavu, alebo:
- ak množstvo tovaru ponúkaného na predaj je príliš veľké, kupujúci ponúkajú ceny nižšie než ceny, ktoré sú predávajúci akceptovať a ponuka klesá k rovnovážnemu stavu.

Obe úvahy sú rozdielne a môžu viesť k rôznym záverom. Prvá úvaha neberie do ohľadu zásoby tovaru. Druhá s nimi počíta.

V tomto článku sa obe úvahy spresnia a odvodia sa ich matematické modely.

Základné pojmy a predpoklady modelov

Hodnoty a funkcie na konci *t*-tého obdobia

P_t	očakávaná cena tovaru,
$D_t = \alpha + a.P_t$	ponuka tovaru – lineárna aproximácia (prijateľná v okolí rovnovážneho stavu), $a < 0$,
$S_t = \beta + b.P_t$	dopyt po tovare – lineárna aproximácia (prijateľná v okolí rovnovážneho stavu), $b > 0$,
Q_t	zásoba tovaru,
P_{rov}	cena tovaru ak je trh v rovnovážnom stave,
Q_{rov}	zásoba tovaru ak je trh v rovnovážnom stave,
X_t	množstvo predaného tovaru = množstvo kúpeného tovaru,
ρ, λ	koeficienty tlmenia, reakcia na zmeny.

V modeli sa skúmajú iba malé odchýlky od rovnovážneho stavu. Rovnovážny stav je stabilný, ak malá začiatočná odchýlka vedie k (dynamickému) pohybu späť do rovnovážneho stavu. Funkcie ponuky $D_t(P)$ a dopytu $St(P)$ sú vo všeobecnom prípade nelineárne funkcie, v ktorých nezávisle premenná je cena P. V okolí rovnovážneho bodu sa dajú aproximovať lineárnymi funkciami D_t a S_t, pričom koeficient a je *marginálna ponuka* a koeficient b je *marginálny dopyt*.

Bude sa tvoriť a skúmať dynamický nespojitý model, ktorý opisuje zmeny ceny tovaru v jednotlivých obdobiach. Ako matematický aparát sa použijú diferenčné rovnice. Výpočty sa vykonajú v Exceli.

Model predstavuje trh jednoho druhu tovaru. Množstvo nakúpeného tovaru sa rovná množstvu predaného tovaru. Cena je tá premenná, ktorá uvádza trh do rovnovážneho stavu. Cena sa stanoví tak, aby sa dopyt rovnal ponuke. Parametre dopytu a ponuky sa nemenia.

Elementárny pavučinový model

Statický model je daný rovnicou $X_t = \alpha + a.P_t = \beta + b.P_t$

Dynamický model bude mať pevné oneskorenie o jedno obdobie na strane ponuky.

Dynamický model je daný rovnicou $X_t = \alpha + a.P_t = \beta + b.P_{t-1}$ (1)

Na strane ponuky sa očakáva, že **cena z predchádzajúceho obdobia sa udrží**. Toto očakávanie sa nesplní, pretože cena osciluje okolo rovnovážnej polohy. Model neberie do ohľadu zásoby tovaru. Je vhodný napríklad pre určenie ceny tovaru rýchlo podliehajúcemu skaze. Predpokladá, že sa peňažné prostriedky medzi obdobiami nepresúvajú. Nezohľadňuje ani ceny podobných tovarov a ani ostatnú spotrebu. Model slúži ako základ pre realistickejšie modely určovania ceny.

Rovnovážny stav (statická rovnováha) trhu nastane vtedy, ak sa ponuka rovná dopytu počas viacerých za sebou nasledujúcich období, t. j. ak platí

$$X_{rov} = \alpha + a.P_{rov} = \beta + b.P_{rov} \tag{2}$$

Vtedy sa dynamický model správa ako statický model.

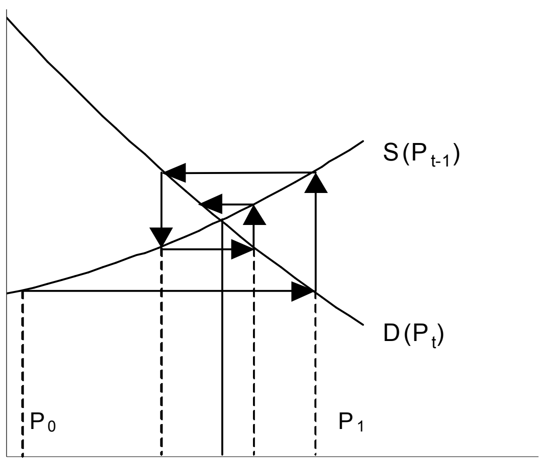
Z rovnosti sa dá vypočítať rovnovážna cena a rovnovážne množstvo tovaru

$$P_{rov} = \frac{\alpha - \beta}{b - a}, \qquad X_{rov} = \frac{b\alpha - a\beta}{b - a} \tag{3}$$

Rovnosť (1) sa dá upraviť na tvar diferenčnej rovnice prvého rádu

$$P_t = (\beta - \alpha)/a + b/a.P_{t-1} \tag{4}$$

Pomer $c = b/a < 0$ určuje stabilitu riešenia diferenčnej rovnice. Ak je $c < -1$, riešenie diferenčnej rovnice (4) osciluje okolo rovnovážneho stavu a tieto oscilácie majú explozívny rast. Ak je $-1 < c < 0$ oscilácie okolo rovnovážneho stvu sú tlmené a cena sa približuje rovnovážnej cene.



Obr. 1. Pavučinový model

Dynamický model nepredpokladal skúsenosti predávajúcich. Model sa dá rozšíriť tak, aby umožňoval modifikovať (uplatniť skúsenosti) očakávania na strane ponuky.

Modifikácia pavučinového modelu

Nech cena v období t, ktorú očakávajú predávajúci je $P_{t-1} - \rho\Delta P_{t-2}$, kde ΔP_{t-2} je zvýšenie ceny od obdobia $t - 2$ po období $t - 1$, t. j. $\Delta P_{t-2} = P_{t-1} - P_{t-2}$ a ρ je daná konštanta. Ak je $0 < \rho < 1$ očakávajú predávajúci, že sa cena bude pohybovať v opačnom smere než v predchádzajúcom období (záporná spätná väzba). Ak je $\rho < 0$, nastane kladná spätná väzba, t. j. predávajúci očakávajú, že sa cena bude pohybovať v tom istom smere než v predchádzajúcom období. Rovnica (1) nadobudne tvar

$$X_t = \alpha + a.P_t = \beta + b.(P_{t-1} - \rho\Delta P_{t-2})$$

t. j.

$$X_t = \alpha + a.P_t = \beta + b.(1 - \rho)P_{t-1} + b.\rho\, P_{t-2} \tag{5}$$

Dosaďme $P_t = P_{rov}$ a $P_t = P_{rov}$ pre všetky t. Dostaneme rovnicu

$$X_{rov} = \alpha + a.P_{rov} = \beta + b.(1 - \rho)P_{rov} + b.\rho\, P_{rov}$$

ktorá má to isté riešenie ako rovnica (3). Teda **rovnovážne hodnoty sú také isté ako pri statickej rovnováhe.**

Zo vzorca (5) dostaneme diferenčnú rovnicu pre výpočet očakávanej ceny v období t:

$$P_t = (\beta - \alpha)/a + b/a.(1 - \rho)P_{t-1} + b/a.\rho\, P_{t-2} \tag{6}$$

Rovnica (6) sa v matematike píše v tvare

$$P_{t+2} = (\beta - \alpha)/a + b/a.(1 - \rho)P_{t+1} + b/a.\rho\, P_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots \qquad (7)$$

Rovnica (7) je diferenčná rovnica druhého rádu. Ak chceme vypočítať jej partikulárne riešenie, treba zadať dve začiatočné hodnoty, a to P_0 a P_1. Ďalšie hodnoty sa vypočítajú podľa vzorca (7).

Príklad 1. Model (5) nech má nasledujúce parametre:

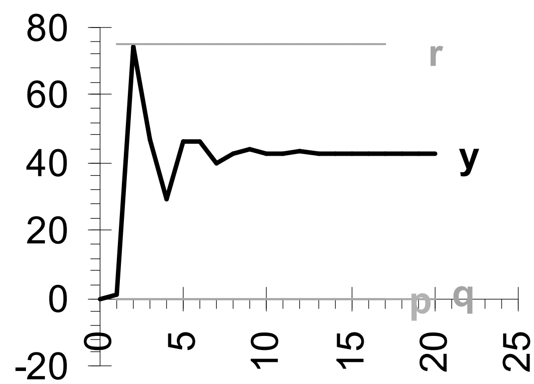
$$D_t = 4 - 0{,}04P_t;\ S_t = 1 + 0{,}03P_{t-1};\ \rho = 0{,}5;$$

Treba určiť očakávanú cenu v obdobiach $t = 2, 3, \ldots$ ak začiatočné hodnoty sú $P_0 = 0$; $P_1 = 1$. Riešenie je ako na obr. 2, ktorý predstavuje excelovskú aplikáciu modelu (5). Cena osciluje okolo rovnovážnej hodnoty. Oscilácie sú tlmené, pretože korene charakteristickej rovnice

$$P_{t+2} - b/a.(1 - \rho)P_{t+1} - b/a.\rho\, P_t = 0$$

sú –0,4529 a 0,8273, teda v absolútnej hodnote menšie ako 1. Oscilácie spôsobuje prvý záporný koreň. Rovnovážna hodnota P_{rov} = 42,8571. Hodnoty v tabuľke vľavo na obr. 2 sú zaradom

t	$P(t)$	$r(t)$	$p(t)$	$q(t)$
0	**0**	**75**	**-0,375**	**-0,375**
1	**1**	75	-0,375	-0,375
2	**74,625**	75	-0,375	-0,375
3	**46,6406**	75	-0,375	-0,375
4	**29,5254**	75	-0,375	-0,375
5	**46,4377**	75	-0,375	-0,375
6	**46,5138**	75	-0,375	-0,375
7	**40,1432**	75	-0,375	-0,375
8	**42,5036**	75	-0,375	-0,375
9	**44,0075**	75	-0,375	-0,375
10	**42,5583**	75	-0,375	-0,375
11	**42,5378**	75	-0,375	-0,375
12	**43,0889**	75	-0,375	-0,375



Obr. 2. Modifikácia pavučinového modelu.

Poznámka. Excelovská aplikácia dovoľuje počítať aj diferenčné rovnice s premenlivými koeficientami, a to rovnice tvaru $P_{t+2} = p(t).P_{t+1} + q(t).P_t + r(t)$. V príklade 1 sú koeficienty $p(t) = -\ b/a.(1 - \rho) = -0{,}375$, $q(t) = -\ b/a.\rho = -0{,}375$ a $r(t) = 0$ konštantné.

Model založený na zmene zásob

Budeme predpokladať, že funkcia ponuky a dopytu sú lineárne (alebo sa v okolí rovnovážneho bodu dajú takto vhodne aproximovať) a bez oneskorení a že obchodníci vždy nakupujú a predávajú tovar za cenu, ktorá sa určí z podmienky: **cena sa zvýši ak zásoby z predchádzajúceho obdobia sa znížia a prírastok ceny je úmerný poklesu zásob**.

Potom platí

$$P_t = P_{t-1} - \lambda \Delta Q_{t-1}, \qquad (8)$$

kde $\Delta Q_{t-1} = Q_{t-1} - Q_{t-2} = S_{t-1} - D_{t-1} = (\beta - \alpha) + (b - a)\, P_{t-1}$

a rovnica (8) nadobudne tvar

$$P_t = \lambda(\alpha - \beta) + \{1 - \lambda(b - a)\}.P_{t-1} \qquad (9)$$

Ak dosadíme pre všetky $P_t = P_{rov}$ dostaneme rovnicu

$$P_{rov} = \lambda(\alpha - \beta) + \{1 - \lambda(b - a)\}.P_{rov}$$

ktorá má riešenie zhodné s riešením (3). **Rovnovážny stav je ten istý**.

Rovnicu (9) napíšeme v tvare

$$P_{t+1} = \lambda(\alpha - \beta) + \{1 - \lambda(b - a)\}.P_t \tag{10}$$

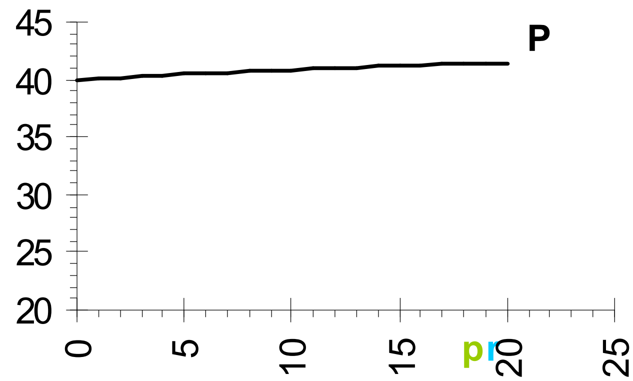
a budeme podľa nej počítať hodnoty P_1, P_2, ... Ako štartovaciu hodnotu potrebujeme hodnotu P_0.

Príklad 2. Model (10) nech má nasledujúce parametre (zhodné s parametrami v príklade 1):

$D_t = 4 - 0{,}04P_t$; $S_t = 1 + 0{,}03P_{t-1}$; $\rho = 0{,}5$;

Treba určiť očakávanú cenu v obdobiach $t = 1, 2, 3, ...$ ak začiatočná hodnota je $P_0 = 40$.
Riešenie je ako na obr. 3, ktorý predstavuje excelovskú aplikáciu modelu (10).
Cena rastie monotónne k rovnovážnej hodnote 42,857, pretože koreň charakteristickej rovnice je rovný 0,965, teda v intervale (0;1). Hodnoty v tabuľke vľavo na obr. 3 sú zaradom

t	*P*(*t*)	*r*(*t*)	*p*(*t*)
0	**40**	**1,5**	**0,965**
1	**40,1**	1,5	0,965
2	**40,1965**	1,5	0,965
3	**40,2896**	1,5	0,965
4	**40,3795**	1,5	0,965
5	**40,4662**	1,5	0,965
6	**40,5499**	1,5	0,965
7	**40,6306**	1,5	0,965
8	**40,7086**	1,5	0,965
9	**40,7838**	1,5	0,965
10	**40,8563**	1,5	0,965



Obr. 3. Závislosť ceny na zmene zásob.

Model založený na úrovni zásob

Budeme predpokladať, že

- funkcia ponuky a dopytu sú lineárne (alebo sa v okolí rovnovážneho bodu dajú takto vhodne aproximovať) a bez oneskorení,
- obchodníci vždy nakupujú a predávajú tovar za cenu, ktorá sa určí z podmienky:
- **cena sa zvýši ak úroveň zásob z predchádzajúceho obdobia klesne pod danú výšku Q a toto zvýšenie je úmerné poklesu zásob pod Q.**

Potom platí

$$P_t = P_{t-1} - \lambda(Q_{t-1} - Q_{rov}) \text{ a } \qquad P_{t-1} = P_{t-2} - \lambda(Q_{t-2} - Q_{rov}).$$

Po odčítaní dostaneme

$$P_t - P_{t-1} = P_{t-1} - P_{t-2} - \lambda(Q_{t-1} - Q_{t-2}) \tag{11}$$

Po úprave nadobudne rovnica (11) tvar

$$P_t = \lambda(\alpha - \beta) + \{2 - \lambda(b - a)\}.P_{t-1} - P_{t-2} \tag{12}$$

Rovnica (12) je diferenčná rovnica druhého rádu, pretože obsahuje ceny z dvoch predchádzajúcich období. Napíšeme ju v tvare

$$P_{t+2} = \lambda(\alpha - \beta) + \{2 - \lambda(b - a)\}.P_{t+1} - P_t \tag{13}$$

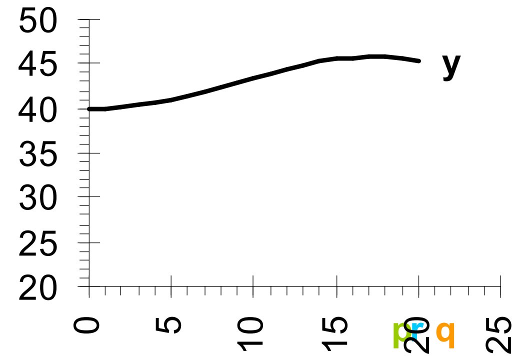
Ak chceme vypočítať jej partikulárne riešenie, treba zadať dve začiatočné hodnoty, a to P_0 a P_1. Ďalšie hodnoty sa vypočítajú podľa vzorca (13).

Príklad 3. Model (13) nech má nasledujúce parametre (zhodné s parametrami v príklade 1):

$D_t = 4 - 0{,}04P_t$; $S_t = 1 + 0{,}03P_{t-1}$; $\rho = 0{,}5$. Treba určiť očakávanú cenu v obdobiach $t = 1, 2, 3,...$ ak začiatočné hodnoty sú $P_0 = 40; P_1 = 40$.

Riešenie je ako na obr. 4, ktorý predstavuje excelovskú aplikáciu modelu (13). Cena sa blíži k rovnovážnej hodnote 42,857, pretože kladný koreň charakteristickej rovnice je rovný 0,965, teda v intervale (0;1). Hodnoty v tabuľke vľavo na obr. 4 sú zaradom

t	*P*(*t*)	*r*(*t*)	*p*(*t*)	*q*(*t*)
0	**40**	**1,5**	**1,965**	**-1**
1	**40**	1,5	1,965	-1
2	**40,1**	1,5	1,965	-1
3	**40,2965**	1,5	1,965	-1
4	**40,5826**	1,5	1,965	-1
5	**40,9484**	1,5	1,965	-1
6	**41,3809**	1,5	1,965	-1
7	**41,8651**	1,5	1,965	-1
8	**42,384**	1,5	1,965	-1
9	**42,9195**	1,5	1,965	-1
10	**43,4528**	1,5	1,965	-1



Obr. 4. Závislosť ceny na veľkosti zásob.

Literatúra

1. Greguš, M.: The Effectiveness of Advertising on the Market. Zborník vedeckej konferencie Podnikovohospodárskej fakulty EU Košice 1999.
2. Peller, F. – Škrovánková, L.: The applications in several aspects of marketing research. Conference proceedings Czech and Slovak section – Transformation of CEEC Economies to EU Standards, University of Trento 2000, vydala Fakulta podnikatelská VÚT Brno. s. 51.
3. Allen, R. G. D.: Matematická ekonomie (preklad z angličtiny). ACADEMIA Praha 1971.

Adresa autorov:
Doc. RNDr. Arnold Dávid, CSc.,
Prof. Ing. RNDr. František Peller, PhD.
Ekonomická univerzita v Bratislave
Fakulta hospodárskej informatiky
Katedra matematiky.

CALCULATION OF PRICES GOODS BY DIFFERENCE EQUATION

Abstract. In the article are defined the price goods by various criteria of their determination.Be used difference equation first order and second order. Excel applications make possible solve this problem without usage complicated formula.

Key words: cobweb model, diferencne equation, price goods, Excel.

Oponoval: doc. RNDr. Beáta Stehlíková, CSc.