

## NIEKOĽKO POZNÁMOK K HISTÓRII MATEMATIKY V RANNOM STREDOVEKU

Dušan Jedinák, SR

**Abstrakt:** Historické poznámky o osobnostiach, ktoré šírili aj matematickú kultúru.

**Kľúčové slova:** história matematiky, matematická kultúra.

### Úvod

Každé obdobie ľudských dejín má svoje nezanedbateľné postavy, významné osobnosti. Všimnime si obdobie 8. až do polovice 14. storočia z pohľadu historických poznámok o vývoji matematickej kultúry pre potreby školskej vyučovania

Nebudeme diskutovať o tom, ako bol určený stredovek, ani o tom, či a v akom smere bol temným obdobím ľudstva. Chceme si na stručných poznámkach o živote a diele významných súdobých osobností naznačiť, že napriek ich pôsobeniu v sutanách (boli príslušníkmi reholí alebo kňazmi cirkvi), mali záujem aj o prírodovedu a dokonca i matematiku.

Vybrali sme štyri postavy, ktorých úsilie v nami sledovanom spojení náboženského zamerania s matematickou odbornosťou v dohodnutom období je príznačné. Ani vtedy neboli odvrátené strany viery a vedy neprekonateľné.

### Alcuin z Yorku – bystrý mladík stredoveku

#### Veľmi staré úlohy

Asi poznáte príhodu o vlkovi, koze a hlávke kapusty a ich prevoze cez rieku za daných podmienok. Táto úloha je veľmi stará. Nachádza sa aj v spise *Úlohy na bystrenie rozumu mladých*, už z 8. storočia. Autorom tejto práce, ktorá obsahuje napríklad aj úlohy o psovi a králikovi, o sto mericiach pšenice a ďalšie je **Alcuin z Yorku (asi 735 – 804)** učiteľ, filozof i básnik na dvore Karola Veľkého (747 – 814) v Aachene okolo roku 781. Jeho latinské meno **Alcuin** (Albinus) pochádza z keltského Alh-win, čo znamená priateľ chrámu.

#### Doba a prostredie



York je arcibiskupské sídlo so starou kultúrnou tradíciou a známou kláštornou školou. Tam sa okolo roku 735 narodil anglosaský učenec **Alcuin**. Vyštudoval a potom prednášal v miestnom kláštore. Od roku 781 viedol kultúrne a školské záležitosti panovníka (od roku 768) Karola Veľkého, šíril v jeho ríši vzdelanie (elementárne, artistické i teologické). Základom boli modlitby, žalmy a spev, sedem slobodných umení (gramatika, rétorika, logika, aritmetika, geometria, hudba, astronómia), Biblia a komentáre cirkevných Otcov. Cieľom bolo spoznať spájať kresťanský obsah s klasickými znalosťami. Metódou boli otázky a odpovede s ohľadom na proces vnímania, pamäti a obrazotvornosti. Jednou zo zásad bola myšlienka: „Rozumne sa pýtať, znamená vyučovať.“ **Alcuin** spísal traktáty o gramatike, rétorike, dialektike i muzike, filozofické a teologické spisy i pojednania z histórie. Zvlášť vnímal logiku ako umenie rozumu, ktoré usporadúva poznanie javov ľudských i božských. Radil cisárovi aj v politických otázkach. Od roku 796 bol opäť v kláštore sv.

Martina v Tours, kde vybudoval úspešnú školu pre šírenie vzdelanosti vo Francúzsku. **Alcuin z Yorku** zomrel 19. 5. 805 a jeho telo je pochované v kláštornej kostole v Tours.

### Bystrý um

Už spomínaný spis *Úlohy na bystrenie umu mladých* (Propositiones ad acuendos iuvenes) je zbierkou 53 počtárskych úloh. V nej je ukázané napríklad riešenie úlohy ako rozdeliť 100 mincí medzi 100 osôb, aby muži dostali po troch, ženy po dvoch a každé dve deti spolu po jednej minci. **Alcuin** uvádza riešenie, podľa ktorého bolo zo 100 osôb 11 mužov, 15 žien a 74 detí. Iné z ďalších päť riešení neuvádzal. (Vy poznáte tieto ďalšie riešenia, v podstate rovnice o dvoch neznámych v množine prirodzených čísel?) Súčasťou tejto zbierky úloh sú aj zadania na postupnosti (napr. o počte holubov na 100 priečkovom rebríku, ak na jednotlivých priečkach holuby sedia postupne v počte 1, 2, 3, ..., 100), výpočet obsahov, ale aj zadania kombinatorických úloh i rôzne výpočtové zadania a úlohy s nematematickou základnou úvahou.

### Historické zázemie



Karolínska renesancia priniesla oživenie vzdelávania v starších kláštornej školách a začínajúcich školách pri katedrálach. Írsky mních **Alcuin z Yorku** usporiadal zásadné výroky autorít (Beda Venerabilis, Isidor, Boethius, Augustín, Cicero) pre školské potreby. Prispel k celkovej obnove a reforme vzdelania vo Franskej ríši (Karol Veľký sa stal cisárom v Ríme roku 800). Ukazuje sa, že aj podnety zo začiatku stredoveku, ktoré sú ešte stále súčasťou školskej matematiky, patria k európskemu kultúrnemu dedičstvu a vytvárajú historické korene rôznych matematických disciplín.

### Gerbert z Aurilacu – matematik pápežom

#### Nečakané spojenie

Možno je to nezvyčajná otázka: Bol niekedy v histórii pápežom človek, ktorý bol aj uznávaným matematikom? Správna odpoveď znie – áno, francúzsky matematik **Gerbert z Aurilacu** (bol neskôr pápežom **Silvestrom II.**).

#### Poznal arabskú matematiku

Pravidlá vedú k zovšeobecneniu. Zovšeobecnenie predpokladá presnú znalosť súvislostí. Z matematiky sa stáva skoro čarodejníctvo. O tom, kto ovládal umenie deliť ľubovoľné veľké čísla hovorili, že sa upísal diablu. Aritmetika vyžadovala formálnu obratnosť. Bystré hlavy ponúkali pre výpočty spôsob abacistov (počítanie na „líniách“) alebo algoritmikov (počítanie „perom“). Slávnym abacistom bol **Gerbert z Aurilacu** (930/945 – 1003). Narodil sa medzi rokmi 930 až 945 v Auvergene. Dostal úplné vzdelanie, mimoriadne prospieval v matematike i astronómii. Osud ho priviedol aj do Španielska, kde tento francúzsky kňaz ako jeden z prvých európskych učencov študoval arabskú matematiku. V tej dobe bola v Cordobe arabská vysoká škola (s bohatou knižnicou arabských, gréckych a latinských textov), kde sa prednášala aj matematika.



**Gerbert** skvele popularizoval dielo Boethiovo, časti Euklidových Základov i praktickú geometriu. Ovládal počítanie na abaku – sčítacej doske. Namiesto kamienkov používal žetóny s číselnými znakmi. V jeho *Knihe o delení čísel* a *Pravidlách o počítaní na abaku* možno spoznať termíny deleneč a deliteľ. V pojednaní *Geometria* (94 článkov) vysvetlil základné

pojmy (bod, čiara, plocha, teleso), jednoduché poznatky a metódy výpočtov výšok, hĺbok a vzdialeností. V časti o zememeračských praktikách spomína i počítanie s figurálnymi číslami. Zorganizoval školu v Remeši, kde vyučoval disciplíny kvadrívia (aritmetika, geometria, astronómia, hudba). Okrem matematiky sa zaoberal aj logikou, filozofiou i astronómiou. Napísal pojednania o dialektike, teológii i politike. V Magdeburgu skonštruoval slnečné hodiny, keď predtým skúmal polohu Polárky. Zaoberal sa mnohostranným využitím astrolábu (prístroj na meranie uhlov v súdobej astronómii).

### Nábožný aj učený

**Gerbert z Aurilacu** ako učenec, výnimočná osobnosť na poli cirkevnom i politickom, posunul západné myslenie bližšie k prameňom antickej filozofie a vedy, podnietil aj záujem o samostatné pozorovanie a skúmanie. Študoval Vergília, uplatňoval novoplatónsky štýl myslenia. Stal sa vplyvným mužom svojej doby, oslňoval všestrannosťou a prenikavosťou svojho umu. Vynikal aj ako široko vzdelaný a originálny učiteľ. Ako učený arcibiskup ravenký radil aj cisárovi Otovi III. (panoval 995 – 1002) a ten ho určil roku 999 za pápeža. **Gerbert** bol prvý Francúz na pápežskom stolci a prijal meno **Silvester II.** V tejto funkcii prispel k organizácii cirkvi v Poľsku i v Uhorsku. V roku 1001 poslal uhorskému kráľovi Štefanovi I. kráľovskú korunu. Vyhlásil za svätého pražského biskupa Vojtecha. S úspechom sa zapísal do dejín cirkvi i matematiky. Zomrel 12. mája 1003.

Je mimoriadne zaujímavé i podnetné, že k popredným osobnostiam spred tisíc rokov patrí **Gerbert z Aurilacu**, človek mnohostranných kultúrnych záujmov, literatúry, hudby, vedy i matematickej kultúry.

### Roger Bacon - dôraz na skúsenosť a premýšľanie

#### Stredoveké štúdiá

Medzi najstaršie vysoké školy patria univerzity v Paríži a v Oxforde, ktoré sa stali bránou k vrcholnej scholastike (vyučovať a učiť sa bolo „in“; čas metafyzického ducha, kde premýšľajúci človek bol viac než stroj a peniaze). Základom stredovekého štúdia bolo sedem slobodných umení: gramatika, rétorika, dialektika, aritmetika, geometria, astronómia a hudba. Jedným z najkritickejších mužov oxfordskej scholastiky bol františkánsky mních **Roger Bacon (asi 1214 – 1294)**.

#### Osudy života

Dôkladnú znalosť všetkých odborov niekdajšej vedy (matematiky, medicíny, teológie a filozofie) získal v Oxforde a v Paríži (1244 – 1250). Mal značný ohlas ako prírodovedec a univerzálny mysliteľ. Viac ako tridsaťročný vstúpil do reholy františkánov a dôverne sa oboznámil s jej myšlienkovým svetom. Stretol sa s Albertom Veľkým, Alexandrom z Halesu, Bonaventúrom i Tomášom Akvinským. Keď sa jeho priateľ G. Fulconi stal pápežom Klementom IV. (1265 – 1268), požiadal Bacona o zaslanie jeho diela. Za kritiku panovníkov i rádových predstavených sa Bacon dostal do kláštorného väzenia v Paríži aj Oxforde (1271 – 1292). Zomrel opustený a zneuznaný.



**Roger Bacon** zvýrazňoval úlohu znalosti jazykov (hebrejčiny, gréčtiny, arabčiny) pre lepšie pochopenie diel Aristotela, Avicenu i Averroesa, ale aj Biblie. Pri skúmaní prírodných javov požadoval väčší dôraz na pokus, fyzikálnu skúsenosť. *„Bez skúsenosti nemožno nič dostatočne poznať... Iba skúsenosť dáva istotu, a nie logický dôkaz.“* Sám rozpracoval niektoré fyzikálne idey, napr. v optike,

magnetizme a praktickej fyzike ( využitie strelného prachu, vízia nových technických prostriedkov ). Zovšeobecnenie vnútornej a vonkajšej skúsenosti videl v abstrakcii a matematizácii, ktorú treba následne preveriť v praxi. Na ceste za experimentálnym poznaním podporoval vnútornú intuíciu, šikovnosť rúk a matematické zovšeobecnenie. V optike, astronómii i v teórii hudby odhalil matematickú povahu vecí. Krásu videl prameniť zo svetla a harmónie.

### Smerom k istote

V diele *Opus maius* (Väčšie dielo) uvažoval o príčinách ľudskej nevedomosti, o vzťahu medzi filozofiou a teológiou, o využití náuk o jazyku, o význame matematiky a experimentálnom poznaní i o etike. *Opus minor* (Menšie dielo) je súhrn Baconových najhlavnejších myšlienok, *Opus tertium* (Tretie dielo) je prehľad tiež hlavného spisu. „*Filozofia rozvíja božskú múdrosť pomocou vedy a umenia.*“ **Roger Bacon** spájal idealizmus a empirizmus, dôsledne odlišoval teológiu a profánne vedy. Uprednostnil výskum konkrétnych predmetov proti prílišnému odvolávaniu sa na authority. Uznan, že experiment je nielen zdrojom poznania, ale aj rozhodujúcim kritériom pravdivosti. Ľudský rozum a skúsenosť vnímal ako nespochybniteľné authority v oblasti prírodných vied. Zdôrazňoval, že exaktné skúmanie reálnych skutočností spolu s matematickým popisom vedie ku koreňom istoty. Ocenil nevyhnutnosť metodologickej precíznosti, exaktnosti a dôslednosti v overovaní prírodovedných poznatkov.

### Experiment a myslenie

Matematiku (v širšom a súdobom zmysle) vnímal **Roger Bacon** ako myšlienkový postup najbližší prirodzenému poznávaniu cez skúsenosť a premýšľanie. Matematické úkony sú prístupné už deťom. Pomerne dôrazne naznačil: „*Kto podceňuje výsledky matematiky, škodí celej vede, lebo ten, kto nepozná matematiku, nemôže poznať exaktné vedy a nemôže pochopiť svet.*“ Matematické poznatky vnímal ako základ všetkého vedeckého poznania a odkázal aj nám: „*Chcel by som vysloviť predpoveď, že čím viac záhad prírody rozriešime, tým viac odvetví matematiky budeme nútení používať.*“ **Roger Bacon** uprednostnil až mystickú intuíciu, ktorú sa snažil preverovať experimentom a popisovať matematicky. „*Máme dva spôsoby poznávania: špekuláciu (teóriu) a experiment.*“ Pochopil, že prírodné vedy majú viesť ľudí k zdokonaleniu sveta, v ktorom žijeme. Vyznačil význam i úlohy experimentálnych skúseností, aby vychádzajúc z teórie smerovali k matematizácii celého ľudskeho poznania. „*Všetko poznanie závisí od teoretickej sily matematiky.*“



Aj dnes si uvedomujeme, spolu s Rogerom Baconom, podstatnú odlišnosť zmyslového a rozumového poznania. Vedecké postupy môžu predstavovať premostenie k harmonickej a pevnej syntéze zjavenej viery a ľudskeho rozumu, aby sme postupne vylúčili príčiny našich omylov, „*pretože kým zotrávajú v ľudskom srdci, rozum nemôže uznať pravdu.*“ Kritický duch Rogera Bacona nám ponúkol zvýraznenie významu experimentálneho a matematického poznávania voči zostarnutým mienkam zdedených autorít. Napriek ťažkému životnému osudu

a nepochopeniu zostal **Roger Bacon** verný presvedčeniu, že rozum i viera môžu nájsť oporu v experimentálnej vede i kresťanskej teológii.

### Thomas Bradwardinus – počtár vhodných pomerov

#### Doba a život

Jedným z významných predstaviteľov oxfordskej školy prírodnej filozofie je aj **Thomas Bradwardinus (asi 1290–1349)**. Pochádzal z mestečka Chichester. Vyštudoval teológiu Merton College na Oxfordskej univerzite, ako františkánsky mních sa stal aj kanonikom (1333) i kancelárom Katedry sv. Pavla v Londýne (1335). Bol aj osobným kaplánom kráľa Edwarda III. Od 4. júna 1349 bol **Bradwardinus** ustanovený za arcibiskupa cantenburského. Ako obeť moru zomrel 26. 8. 1349 v Londýne.

#### Vzťah k prírodným vedám



**Bradwardinus** bol presvedčený o tom, že všetky príčiny prírodných javov sa dajú vyjadriť matematicky (pomocou čiar, uhlov, číselných pomerov). Vydal odbornú prácu *O pomeroch rýchlosti pri pohybe* (1328). Skúmal závislosť medzi rýchlosťou a silou, ktorá ju spôsobuje. Uvádza, že rýchlosť je priamo úmerná pôsobiacej sile a nepriamo úmerná odporu, teda hmotnosti a treniu. Z matematiky napísal práce: *Praktická aritmetika*, *O teoretickej aritmetike*, *Teoretická geometria*, *Traktát o spojitosti*. V nich skúmal napríklad aj pravidelné mnohoúhelníky, izometrické vlastnosti kruhu a gule, pomery iracionálnych čísiel, vyplňanie priestoru pomocou pravidelných mnohostenov. Zvlášť zaujímavé úvahy viedol **Bradwardinus** o spojitosti (z rokov 1328 – 1335).

Uznával, že treba odmietnuť názor o tom, aby kontinuum pozostávalo z konečného počtu nedeliteľných častí, ale aj tvrdenie, že spojité možno dostať ako nekonečne veľa nedeliteľného. „*Žiadne kontinuum sa nedá zložiť z nekonečne veľa nedeliteľných.*“ V podstate už vo svojej dobe rozlišoval aktuálne a potencionálne nekonečno. V *Traktáte o pomeroch* (1328) jasne odlíšil počítanie s kvantitami veličín od výpočtov s prostými číslami. Pochopil pojem funkcia, jej argument a hodnotu funkcie.

#### Filozof a teológ

Vystúpil (1344) proti pelagiánskym názorom, podporil priamu všemohúcnosť Boha prísnou determináciou. V práci *De causa Dei* písal o možnostiach všetko poznávajúcej vedy. Bol nasledníkom učeného Dunsca Scota (1270–1308), ktorý uprednostňoval vôľu pred poznávaním (pretože aktívna vôľa usmerňuje intelekt), ale za vedu berie v prvom rade prírodnú vedu (náboženské dogmy sú exaktne nedokázateľné, majú praktický význam pre ľudské konanie). **Bradwardinus** začal sústreďovať svoju pozornosť na formy, metódy a možnosti ľudského premýšľania.

#### S novým pohľadom

**Thomas Bradwardinus** nesporne prispel k vytváraniu pojmu funkcia, lebo spoznal, že existuje časový priebeh nejakej fyzikálnej veličiny. Pýtal sa, ako prebieha zmena, hľadal medzi zmenami veličín príslušné pomery. Zvlášť citlivo pristúpil k chápaniu spojitého a diskrétného, ktoré leží na rozhraní medzi fyzikou, matematikou a filozofiou. Pohyb chápal

ako prechod priestorového kontinua časom. **Bradwardinus** chcel pomocou matematických úvah vysvetliť niektoré vlastnosti základných pojmov priestoru, času a pohybu.

### **Záver**

Nasledujúce obdobie druhej polovice 14. storočia až do konca 17. storočia prinieslo ešte významnejšie postavy na súde matematickej vedy a praktizovaného náboženstva. N. Oresme (1323 – 1382), M. Kuzánsky (1401 – 1464), L. Pacioli (1448 – 1514), B. Cavalieri (1598 – 1647) sú úspešní predstavitelia spolupráce duchovných hodnôt v matematike i v náboženstve. O tom v ich diele zaspomíname a napíšeme možno nabudúce.

### **Odporúčaná literatúra:**

- BEČVÁŘ, J. a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*. Praha: Prometheus, 2001.  
HRUŠOVSKÝ, I. a kol.: *Patristika a scholastika*. Bratislava: PRAVDA, 1975.  
JUŠKEVIČ, A. P.: *Dějiny matematiky ve středověku*. Praha: Academia, 1977.  
KRATOCHVÍL, Z.: *Mýtus, filosofie, věda I., II*. Praha: Jůza, 1996.  
MAČÁK, K.: *Tři středověké sbírky matematických úloh*. Praha: Prometheus, 2001.  
MICHALOV, J.: *Scholastická filozofia*. Nitra: FF UKF, 2002.  
SIROVIČ, F.: *Dejiny filozofie - stredovek*. Trnava: Dobrá kniha, 1995.  
STÖRING, H..J.: *Malé dějiny filozofie*. Praha: ZVON, 1995.

**Adresa:** Pedagogická fakulta TU v Trnave, Priemyselná 4, 918 43 TRNAVA  
e-mail: djedinak @ truni.sk

## **SOME REMARKS ABOUT HISTORICAL MATHEMATICS IN THE EARLY MIDDLE AGES**

**Abstract:** Historical comments about individualities, who propagated mathematical culture.

**Key words:** history of mathematics, mathematical culture.